Sammlung algebraischer Aufgaben für gewerbliche und technische Lehranstalten

nebst einer Abhandlung über das Stabrechnen

Gleichungen (3. Teil); Proportionalität; Vermische Aufgaben; Summen; Exponentialgleichungen, geometrische Reihen, Zinseszins

Burg, Robert

Frankfurt a.M., 1905

XXIII. Summen.

XXIII. Summen.

§ 1.

1. Wie schreibt man abgekürzt die algebraische Summe der Größen $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_k, \ldots . a_n$? Antwort: $\Sigma\, a_k$.
2. Wie schreibt man die algebraische Summe der Produkte $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, $\ldots . a_k b_k$, $\ldots . a_n b_n$?
3. Wie schreibt man die algebraische Summe der Produkte $a_1 c$, $a_2 c$, $a_3 c$, $\ldots . a_k c$, $\ldots . a_n c$?
4. Erläutere die Gleichung: $\Sigma\, a_k c = c \cdot \Sigma\, a_k$.
5. An einem Körper greifen die beliebig gerichteten parallelen Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots . P_k, \ldots . P_n$ an, von deren beiden Richtungen die eine als positiv, die andere als negativ festgesetzt ist. Wie groß ist die resultierende Kraft R?
6. An einem drehbaren Körper wirken die Momente $M_1, M_2, M_3, \ldots . M_k, \ldots . M_n$. Wie groß ist das resultierende Moment M?
7. n zylindrische Gefäße von den Querschnitten $F_1, F_2, F_3, \ldots . F_k, \ldots . F_n$ sind bis zu den Höhen $h_1, h_2, h_3, \ldots . h_k, \ldots . h_n$ mit Wasser gefüllt und dann durch Kommunikationsröhren verbunden. Wie hoch (h) stellt sich das Wasser in allen Gefäßen?
8. n Körper, deren Volumina $V_1, V_2, V_3, \ldots . V_k, \ldots . V_n$ und deren spezifische Gewichte $s_1, s_2, s_3, \ldots . s_k, \ldots . s_n$ sind, sind miteinander verbunden. Wie groß ist das mittlere spezifische Gewicht s?
9. Von einem bestimmten Stoff werden a_1 *kg* von $C_1{}^0$ Celsius, a_2 *kg* von $C_2{}^0$ Celsius, a_3 *kg* von $C_3{}^0$ Celsius, $\ldots . a_k$ *kg* von $C_k{}^0$ Celsius, $\ldots . a_n$ *kg* von $C_n{}^0$ Celsius ohne Wärmeverlust gemischt. Wieviel (x) ^{0} Celsius beträgt die Mischungstemperatur?
10. In der vorigen Aufgabe werden nicht nur verschiedene Mengen, sondern auch verschiedene Stoffe benutzt, deren spezifische Wärmen $c_1, c_2, c_3, \ldots . c_k, \ldots . c_n$ sind. Wieviel (x) ^{0} Celsius beträgt die Mischungstemperatur?
11. In Aufg. 5 seien die von einem bestimmten Drehpunkt gemessenen (positiv und negativ zu zählenden) Hebelarme der gegebenen Kräfte $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_k, \ldots . a_n$. Wie groß (x) ist der Hebelarm der resultierenden Kraft?

12. Eine bestimmte Arbeit würde von einem ersten Arbeiter allein in a_1 Tagen, von einem zweiten allein in a_2 Tagen, von einem dritten allein in a_3 Tagen und von einem vierten allein in a_4 Tagen vollendet. Wieviel (x) Tage brauchen diese vier Arbeiter zusammen zu der betreffenden Arbeit?

13. In jedes von n zylindrischen, verschieden weiten Gefäßen ist dieselbe Wassermenge eingegossen worden. Nachdem die Wasserhöhen h_1, h_2, h_3, ... h_k, ... h_n der einzelnen Gefäße gemessen sind, werden dieselben durch Kommunikationsröhren verbunden. Wie hoch (h) stellt sich das Wasser in allen Gefäßen?

14. Zwischen 2 Punkten A nnd B einer elektrischen Leitung befinden sich n Drähte (nfache Verzweigung) von den Widerständen w_1, w_2, w_3, ... w_k, ... w_n. Wie groß (w) ist der resultierende Widerstand dieser Verzweigung? (XXII. Aufg. 77.)

§ 2.

15. Berechne $\Sigma k = 1 + 2 + 3 + \ldots . k + \ldots . n$.
Anl. $\Sigma k = n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots . (n - k + 1) + \ldots . 1$.

16. Berechne Σk durch wiederholte Benutzung der Gleichung: $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$.

Anl.
$$\begin{aligned} 2^2 &= 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 \\ 3^2 &= 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 \\ &- - - - - - - \\ (k + 1)^2 &= k^2 + 2 \cdot k + 1 \\ &- - - - - - - \\ (n + 1)^2 &= n^2 + 2 \cdot n + 1 \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Addition der Gleichungen:
$(n + 1)^2 = 1^2 + 2 \cdot \Sigma k + n$; also $\Sigma k = ?$

17. Berechne Σk durch wiederholte Benutzung der Gleichung: $(a + 1)^2 = (a - 1)^2 + 4a$.

18. Berechne die Summe der n ersten ungeraden Zahlen:
a) nach derselben Methode wie Aufg. *15*;
b) unter Benutzung des Resultats von Aufg. *15*;
c) durch wiederholte Benutzung der Gleichung: $(a + 1)^2 = a^2 + [2(a + 1) - 1]$.

19. Berechne $\Sigma k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots . k^2 + \ldots . n^2$ durch wiederholte Benutzung der Gleichung: $(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$.

20. Berechne Σk^2 durch wiederholte Benutzung der Gleichung: $(a + 1)^3 = (a - 1)^3 + 6a^2 + 2$.

21. Berechne $\Sigma k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots . k^3 + \ldots . n^3$:
a) nach entsprechender Methode wie Aufg. *19*;
b) nach entsprechender Methode wie Aufg. *20*.

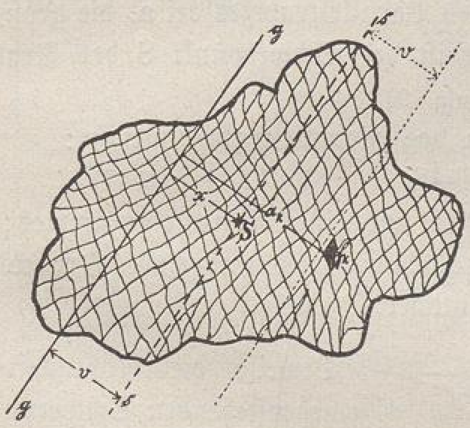
22. In welcher Beziehung steht Σk^3 zu Σk?

23. Wie groß ist:
a) $\frac{\Sigma k}{n^2}$; *b)* $\frac{\Sigma k^2}{n^3}$; *c)* $\frac{\Sigma k^3}{n^4}$?

24. Gib für die in Aufg. *23. a)*, *b)* und *c)* genannten Brüche die Grenzwerte an, denen dieselben zustreben, wenn n ∞ wird.

§ 3.*)

25.



Eine Fläche F sei in sehr viele (n) sehr kleine Flächenteilchen $f_1, f_2, f_3, \ldots . f_k, \ldots . f_n$ geteilt, deren senkrechte Entfernungen von einer in der Ebene von F angenommenen Achse g mit $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_k, \ldots . a_n$ bezeichnet seien. Wie weit (x) ist der Schwerpunkt S der Fläche F von der Achse g entfernt?

Bemerkung: Die Entfernungen $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_k, \ldots . a_n$ und x sind auf der einen Seite von g positiv, auf der anderen negativ zu zählen.

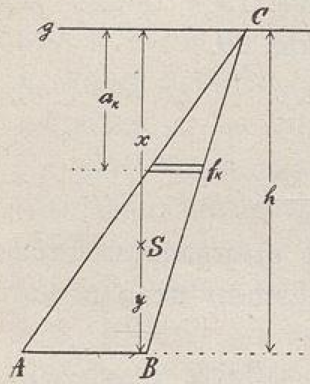
26. Welchen Wert hat $\Sigma f_k a_k$, wenn die Achse g eine Schwerlinie der Fläche F ist?

27. Kehre den in der vorigen Aufgabe enthaltenen Satz um.

28. Beweise die Sätze:
a) Besitzt eine Fläche F eine Symmetrieachse, so ist dieselbe eine Schwerlinie von F.
b) Ist eine Fläche F Summe (oder Differenz) mehrerer Flächen $F_1, F_2, F_3 \ldots .$, deren Schwerpunkte $S_1, S_2, S_3, \ldots .$ auf einer Geraden liegen, so ist diese Gerade eine Schwerlinie von F.

*) Bei Durchnahme dieses Paragraphen ist der experimentelle oder trigonometrische Beweis des Satzes, daß alle Schwerlinien einer Fläche sich in einem Punkte schneiden, zu erwähnen.

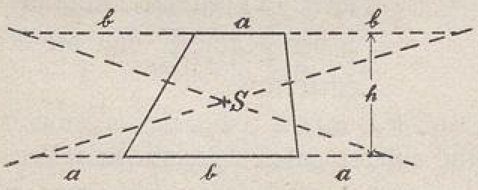
29. Durch den Eckpunkt C eines $\triangle$ ABC sei $g \parallel AB$ gezogen, und das Dreieck durch weitere Parallelen zu AB in sehr viele (n) gleich hohe Streifen geteilt. Als Entfernung eines Streifens von g gelte die Entfernung der von g weiter abstehenden Begrenzungsparallele. Wie groß ist a_k? Wie groß ist f_k? Wie weit (x) ist der Schwerpunkt S des Dreiecks von g entfernt? Wie weit (y) ist S von AB entfernt? (Aufg. *24. b.* und *25.*)



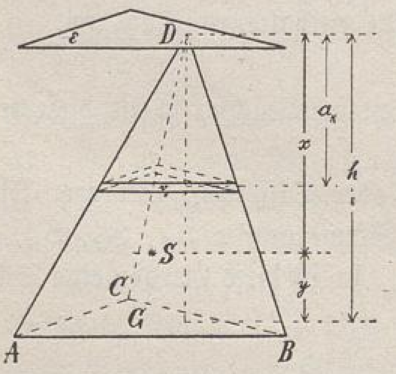
30. Die kleinere Parallelseite eines Paralleltrapezes sei a, die größere b und die Höhe h. Wie weit ist der Schwerpunkt S des Trapezes von a und b entfernt? (Aufg. *24. b.*)

31. Löse Aufg. *30*, indem man das Paralleltrapez auffaßt:
a) als Summe zweier Dreiecke;
b) als Summe eines Dreiecks und eines Parallelogrammes;
c) als Differenz eines Parallelogrammes und eines Dreiecks;
d) als Differenz zweier ähnlicher Dreiecke.

32. Beweise die Richtigkeit der nebenstehenden Schwerpunktskonstruktion für das Paralleltrapez.



33. Durch die Spitze D der Pyramide ABCD sei eine Ebene $\varepsilon \parallel ABC$ gelegt, und die Pyramide durch weitere zu ABC parallele Ebenen in sehr viele (n) gleich hohe prismenartige Teilchen zerlegt. Wie groß (v_k) ist das k^{te} dieser Teilchen, wenn die Fläche ABC = G ist? Wie groß ist der Rauminhalt $V = \Sigma v_k$ der Pyramide? (Aufg. *24. b*)
a) Wie groß ist die Entfernung a_k der Spitze D von v_k? Wie weit (x) ist der Schwerpunkt S der Pyramide von ε entfernt? Wie weit (y) ist S von der Ebene ABC entfernt? (Aufg. *24. c.*)

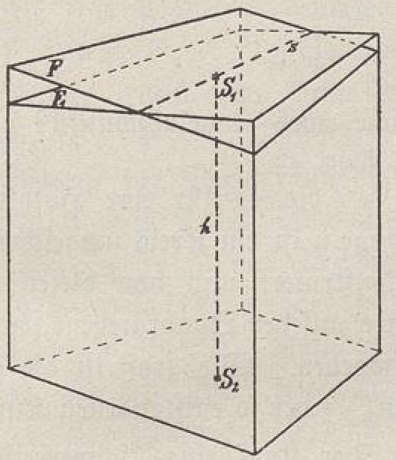


34. Wie weit (x) ist der Schwerpunkt eines Pyramidenstumpfes von der Grundfläche entfernt?

Antwort: $x = \frac{h}{4} \cdot \frac{G_1 + 2\sqrt{G_1 \cdot G_2} + 3G_2}{G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2}$.

a) Dasselbe für einen Kegelstumpf von der Höhe h, dem Grundradius R und Deckradius r.

35.



Die zur Grundfläche parallele Deckfläche F eines geraden Prismas (oder Zylinders) soll durch eine schiefe Deckfläche F_1 ersetzt werden, so daß das Volumen des Prismas (oder Zylinders) unverändert bleibt. Welche Eigenschaft muß die Schnittlinie s von F und F_1 für beide Flächen besitzen?

Anl. $\Sigma f_k \cdot h_k = ?$ $\Sigma f_k \cdot a_k = ?$

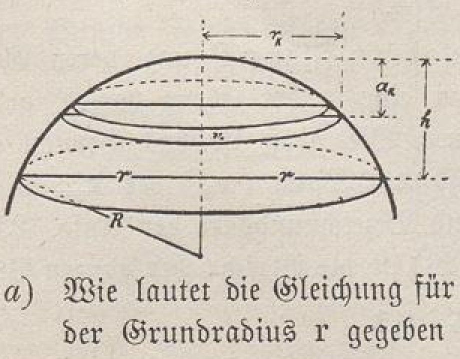
36. Kehre den in der vorigen Aufgabe enthaltenen Satz um.

37. Ein beliebiges schief abgeschnittenes n-seitiges Prisma (oder ein Zylinder) habe den Querschnitt F und zwischen Grund- und Deckfläche die Schwerpunktsentfernung $S_1 S_2 = h$. Wie groß ist sein Volumen? Anm. Beweise geometrisch, daß $S_1 S_2$ zur Prismenkante parallel ist.

38. Ein dreiseitiges Prisma habe den Querschnitt F und die Kantenlängen a, b und c. Wie groß ist sein Volumen? (Aufg. 37.)

39. Ein schief abgeschnittener, gerader Kreiszylinder habe den Grundradius r, die kürzeste Zylinderseite a und die längste Zylinderseite b. Wie groß ist sein Volumen? (Aufg. 37.)

40. Ein Kugelabschnitt (Kalotte) von der Höhe h ist durch Ebenen parallel zum Grundkreis in n gleich hohe Kugelzonen,



welche als Zylinder aufgefaßt werden können, geteilt. Wie groß (v_k) ist das k^{te} dieser Teilchen, wenn der Kugelradius R ist? Wie groß ist das Volumen V des Kugelabschnitts?

a) Wie lautet die Gleichung für V, wenn statt des Kugelradius R der Grundradius r gegeben ist?

41. Wie weit (x) ist der Schwerpunkt S des Kugelabschnitts vom Scheitel desselben entfernt? Wie weit (y) ist S vom Kugelmittelpunkt entfernt? (Aufg. *24.*)

42. Wie groß ist das Volumen eines Kugelausschnitts vom Kugelradius R und der Kalottenhöhe h?

43. Wie weit (z) ist der Schwerpunkt S des Kugelausschnitts vom Kugelmittelpunkt entfernt?

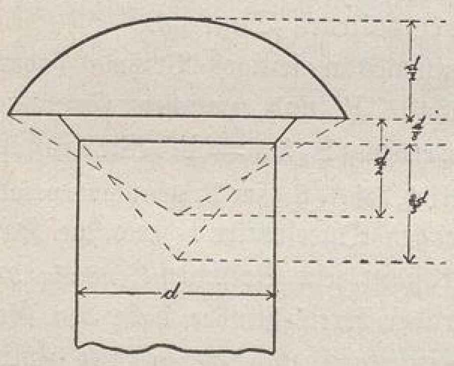
Antwort: $z = \frac{3}{8}(2\,R - h)$.

44. Wie groß (M) ist die Mantelfläche eines Kugelabschnitts?
Anleitung: Benutze das Resultat von Aufg. *42.*

45. Welche Werte ergeben die Aufg. *40* bis *44* für eine Halbkugel?

46. Um ein Quadrat von der Seitenlänge a ist ein Kreis umgeschrieben, über demselben eine Halbkugel konstruiert und von dieser durch Ebenen, welche in den Quadratseiten auf der Quadratebene senkrecht stehen, vier Stücke abgeschnitten worden. Wie groß ist die ganze Oberfläche (O) und der Luftraum (V) der so entstandenen Kuppel?

47.



Der Kopf eines schweißeisernen Nietes vom Durchmesser d (für feste und dichte Verbindungen) besteht aus einer Kalotte vom Radius d und der Höhe $\frac{d}{2}$ und einem Kegelstumpf von der Höhe $\frac{d}{8}$, dessen Ergänzungskegel den Grundradius $\frac{d}{2}$ und die Höhe $\frac{3\,d}{5}$ hat. Wieviel (G) wiegt ein Nietkopf für $d = 20$ *mm*? ($s = 7{,}8$ *g* pro *ccm.*)

§ 4.

48. Eine homogene ebene Platte, deren Fläche F und deren Gewicht pro $qm = \gamma$ ist, rotiere um eine in der Ebene von F gelegene Achse mit der Tourenzahl n. Wie groß ist das Gewicht (g_k), die Geschwindigkeit (c_k) und die Wucht ($\mathfrak{w}_k$) des k^{ten} Plattenteilchen, wenn die Figur und Bezeichnungsart der Aufg. *25* beibehalten wird? Wie groß ($\mathfrak{W}$) ist die Wucht der ganzen Platte?

Antwort: $\mathfrak{W} = \frac{\gamma \cdot n^2}{1789{,}1\ m} \cdot \Sigma\, f_k \cdot a_k{}^2$.

49. In der vorigen Aufgabe heißt derjenige Faktor der Wucht, welcher nur vom Profil und der Lage der Achse g abhängt, das Trägheitsmoment J der Fläche F für die Achse g. Wie groß ist demnach J?

a) Welche Maßeinheit hat ein Trägheitsmoment?

50. Begründe den Additions- (und Subtraktions-) Satz:

Ist eine Fläche F Summe (resp. Differenz) mehrerer Flächen F_1, F_2, F_3, ..., so findet man das Trägheitsmoment von F für irgend eine Achse g, indem die Trägheitsmomente von F_1, F_2, F_3, ... für diese Achse g addiert (resp. subtrahiert).

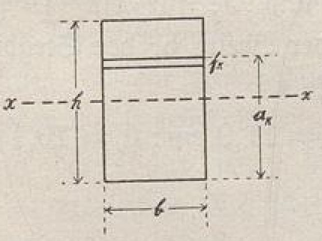
51. Beweise den Verschiebungssatz:

Ist J_s das Trägheitsmoment einer Fläche F für eine Schwerlinie s, so ist das Trägheitsmoment J_g für eine im Abstande v zu s parallel gezogene Achse g:

$J_g = J_s + v^2 F$. (Aufg. *26.*) (Figur vgl. Aufg. *25.*)

a) Welchen Wert hat das Trägheitsmoment J_s einer Fläche für eine Schwerlinie im Vergleich zu den Trägheitsmomenten für andere Achsen derselben Richtung?

52.



Ein Rechteck von der Breite b und der Höhe h ist durch Parallelen zur Breitseite in sehr viele (n) gleich hohe Streifen geteilt. Wie groß ist f_k? Wie groß ist a_k, von einer Breitseite aus gemessen? Wie groß ist das Trägheitsmoment des Rechtecks für diese Breitseite? (Aufg. *24. b.*)

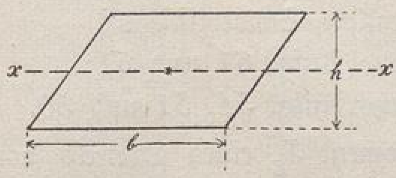
53. Wie groß ist das Trägheitsmoment J_x des vorgenannten Rechtecks für die Mittelparallele zur Breitseite?

a) Benutze Aufg. *52* für jede Rechteckshälfte und Aufg. *50.*

b) Benutze Aufg. *52* für das ganze Rechteck und Aufg. *51.*

c) Benutze die als bekannt vorausgesetzte Gleichung $J_x = u \cdot b \cdot h^3$ für jede Rechteckshälfte, ferner Aufg. *51* und *50* und löse die entstehende Gleichung nach u auf.

54.

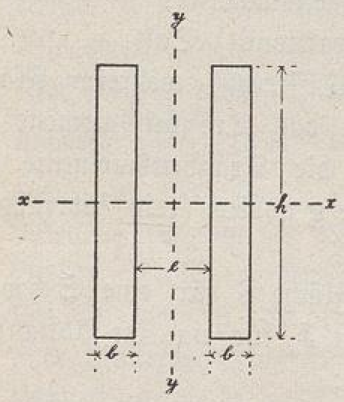


Wie groß ist J_x des nebenstehenden Parallelogrammes?

55. Wie groß ist das Trägheitsmoment J_y des in Aufg. *52* genannten Rechtecks für die Mittelparallele zur Längsseite?

56. Wie groß ist J_x oder J_y für ein Quadrat von der Seitenlänge a?

57. Wie groß ist das Trägheitsmoment J_x einer quadratischen Hohlsäule, deren äußere Quadratseite A und deren innere Quadratseite a ist? *a)* $A = 50\ cm$; $a = 42\ cm$; *b)* $A = 32\ cm$; $a = 26\ cm$.

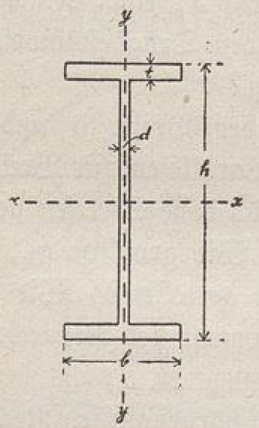


58. Wie groß ist J_x und J_y für eine aus 2 parallel liegenden Rechtecken von der Breite b und der Höhe h bestehende Fläche, wenn die innere Entfernung der beiden Rechtecke e ist?

Antw. $J_y = \frac{1}{6}\, bh\,(4b^2 + 6be + 3e^2)$.

59. Für welchen Wert der inneren Entfernung e werden in der vorigen Aufgabe J_x und J_y einander gleich?

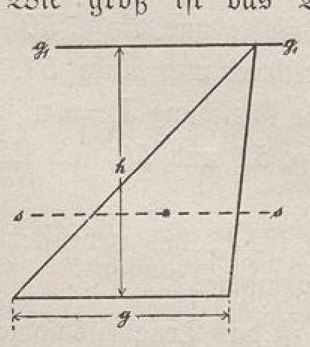
a) Welchen Wert hat diese innere Entfernung, wenn $h = 2b$ ist und $J_x = J_y$ sein soll?



60. Wie groß ist J_x und J_y für ein I-Profil von der Höhe h, der Breite b, der Stegdicke d und der Flanschdicke t?

a) $h = 28\ cm$; $b = 11{,}9\ cm$; $d = 10{,}1\ mm$; $t = 15{,}2\ mm$.

61. Wie groß ist das Trägheitsmoment J eines Dreiecks von der Grundlinie g und der Höhe h für eine durch die Spitze parallel zu g gezogene Achse g_1? (Aufg. *24 c.*)



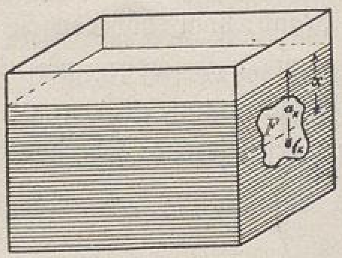
62. Wie groß ist das Trägheitsmoment J_s des vorgenannten Dreiecks für die zur Grundlinie parallele Schwerlinie s?

a) Benutze Aufg. *61* und *51*;

b) Benutze Aufg. *54*, *51* und *50*.

63. Wie groß ist das Trägheitsmoment J_g eines Dreiecks von der Grundlinie g und der Höhe h für die Grundlinie als Achse?

64. Eine vertikale Fläche F erfahre horizontalen Druck durch eine Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht s. Wie groß ist der Druck p_k auf ein Flächenteilchen f_k, dessen Entfernung vom Niveau der Flüssigkeit a_k ist? Wie groß ist der resultierende Druck P für die ganze Fläche F? Wie groß ist P, wenn die horizontale Schwerlinie der Fläche F vom Flüssigkeitsniveau die Entfernung x hat?



65. Wie groß ist in der vorigen Aufgabe das Moment des auf f_k wirkenden Druckes p_k in Bezug auf die Niveaulinie als Drehachse? Wie groß ist das resultierende Moment M des auf F wirkenden Druckes P in Bezug auf dieselbe Achse? Wie weit (y) unter der Niveaulinie liegt der Druckmittelpunkt, d. h. der Angriffspunkt des resultierenden Druckes P?

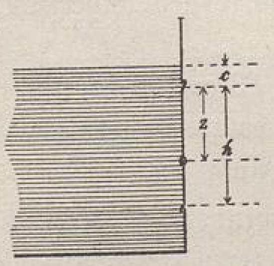
66. Wie groß ist in der vorigen Aufgabe y, wenn das Trägheitsmoment der Fläche F für die Niveaulinie J ist?

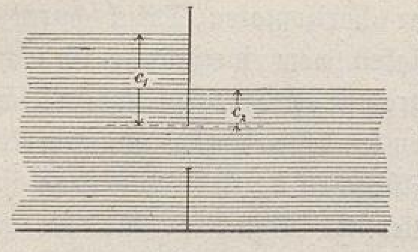
67. Ein prismatischer Behälter ist bis zur Höhe h mit Wasser gefüllt. Wie tief (y) unter dem Wasserspiegel liegt der Druckmittelpunkt für jede Gefäßwand?

68. Aufg. *67* für eine Wand, welche ein mit der Spitze nach unten gekehrtes Dreieck bildet. (Aufg. *63*.)

69. In der Wand eines prismatischen Wasserbehälters befindet sich eine rechteckige Glasscheibe von der Höhe $h = 1\ m$, deren oberer Rand vom Wasserspiegel die Entfernung $c = 20\ cm$ hat. Wie weit (z) liegt der Druckmittelpunkt unter dem oberen Scheibenrand und wie weit (u) unter dem Schwerpunkt der Scheibe. Wie groß (P) ist der resultierende Wasserdruck, wenn die Scheibe $b = 40\ cm$ breit ist?

70. In der senkrechten Wand eines Wasserbehälters befindet sich eine rechteckige Klappe von der Höhe h, welche sich um eine horizontale Achse drehen läßt, so daß sie sich oben nach außen öffnet. Diese Achse hat vom oberen Rand der Klappe die Entfernung z. Wie hoch (c) über den oberen Rand der Klappe darf das Wasser steigen, ehe die Klappe sich öffnet?





71\. In einer vertikalen Schleusenwand ist eine rechteckige Klappe, deren oberer Rand vom höheren Wasserspiegel um c_1, vom niedrigeren Wasserspiegel um c_2 entfernt ist. Wo greift der resultierende Überdruck an?

§ 5.

72\. Die in Aufg. *48* beschriebene ebene Platte rotiere um eine zu ihr senkrechte sog. Polarachse l mit der Tourenzahl n. Wie groß (W) ist die Wucht der Platte?

Anl. Die Entfernung des Flächenteilchens f_k von der Polarachse heiße r_k.

73\. Wie groß ist das polare Trägheitsmoment J von F? (Aufg. *49.*)

74\. Wie groß ist das polare Trägheitsmoment J_z eines Kreises vom Radius r für die in seinem Mittelpunkt errichtete Polarachse z?

Anl. Teile einen Radius in n gleiche Teile und lege durch die Teilpunkte konzentrische Kreise.

75\. Für 2 aufeinander senkrechte Achsen g und h sind die Trägheitsmomente J_g und J_h einer Fläche F bekannt. Wie groß ist das polare Trägheitsmoment J_l für die im Schnittpunkt von g und h errichtete Polarachse l? Anl. Pythagoras!

76\. Wie groß ist das polare Trägheitsmoment eines Rechtecks für eine

a) im Schwerpunkt errichtete Polarachse z?

b). im Mittelpunkt der Breitseite errichtete Polarachse l?

c) im Mittelpunkt der Längsseite errichtete Polarachse l?

77\. Wie groß ist das Trägheitsmoment eines Kreises vom Radius r für irgend einen Durchmesser? (Aufg. *74* und *75.*)

78\. Wie groß ist das Trägheitsmoment eines Quadrates von der Seitenlänge a für eine beliebige Schwerlinie?

79\. Wie groß ist das auf einen Durchmesser bezogene Trägheitsmoment J eines ringförmigen Querschnitts, dessen äußerer Durchmesser D und dessen lichte Weite d ist?

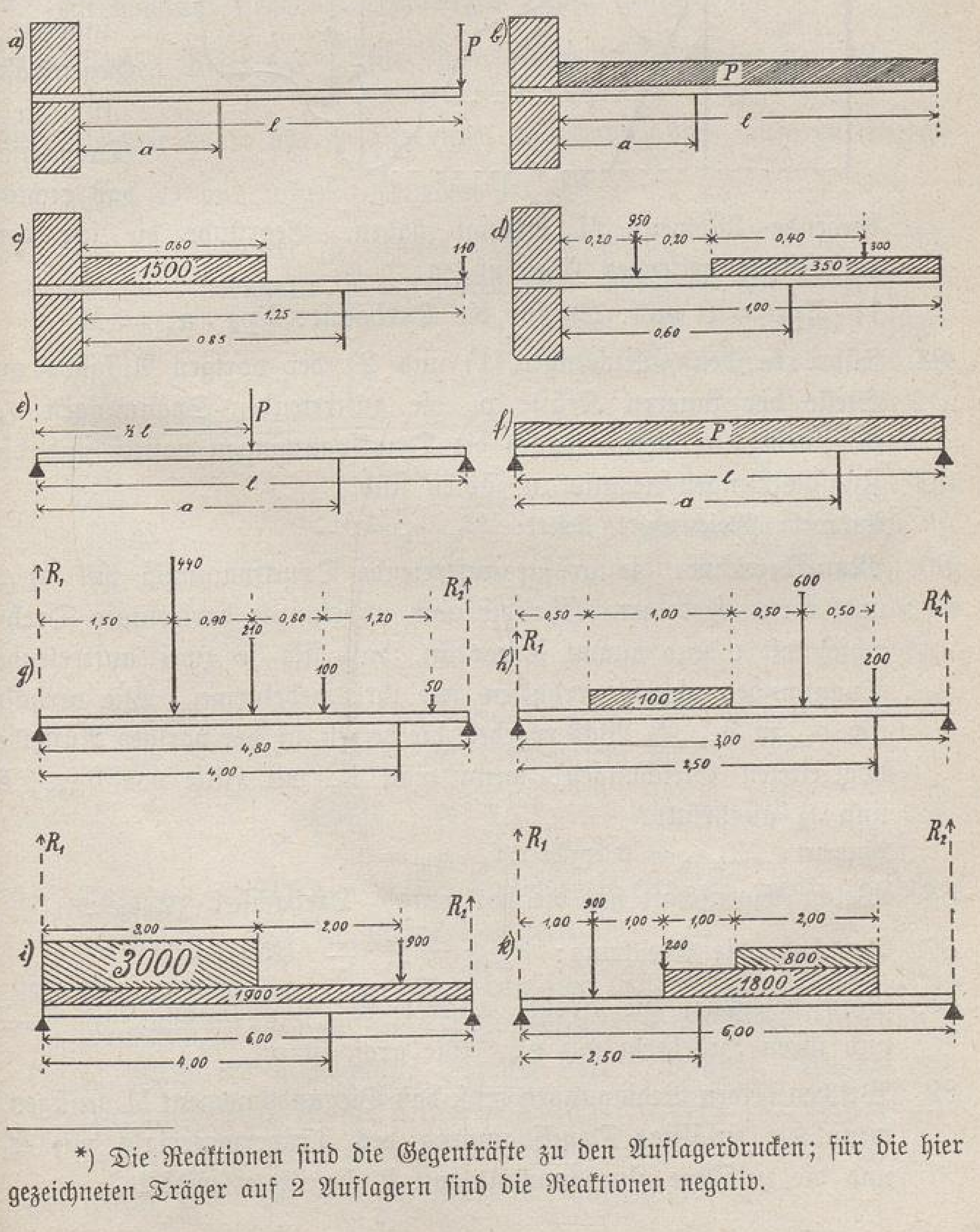
a) $D = 30\,cm$; $d = 24\,cm$; *b*) $D = 13\,cm$; $d = 9{,}4\,cm$.

80\. Gib den Verschiebungssatz (Aufg. *51*) für polare Trägheitsmomente an und beweise denselben mit Hilfe von Aufg. *75*.

81\. Wie groß ist das polare Trägheitsmoment eines Kreises vom Radius r für eine exzentrische Polarachse, deren Exzentrizität e ist?

§ 6.

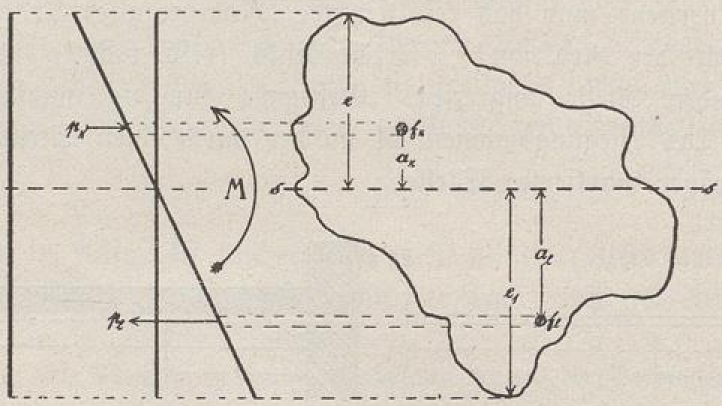
82. Unter dem Biegungsmoment M eines Trägers an einer bestimmten Stelle versteht man das resultierende Moment aller Kräfte einschließlich der Reaktion*), welche links (resp. rechts) von der betreffenden Stelle angreifen. Bestimme für die nachstehenden Träger das Biegungsmoment M an der durch einen Strich unter dem Träger markierten Stelle.



---

*) Die Reaktionen sind die Gegenkräfte zu den Auflagerdrucken; für die hier gezeichneten Träger auf 2 Auflagern sind die Reaktionen negativ.

83. Das an nebenstehendem Querschnitt F wirkende linksdrehende Biegungsmoment M dreht denselben solange um eine horizontale Achse, bis die infolge dieser Formänderung entstandenen inneren Gegenkräfte für die Drehachse das rechts-



drehende Moment M erlangt haben. Begründe die für den Endzustand geltenden Gleichungen:

1) $\Sigma p_k = 0$ und: 2) für die Drehachse: $\Sigma p_k \cdot a_k = M$.

84. Führe in den Gleichungen 1) und 2) der vorigen Aufgabe an Stelle der inneren Kräfte p_k die auftretenden Spannungen σ_k ein, wobei (in diesem Falle) die Druckspannungen positiv und die Zugspannungen negativ zu zählen sind.

Antwort: Gleichung 1) liefert: $\Sigma f_k \cdot \sigma_k = 0$.

85. Man bezeichnet die größte auftretende Druckspannung mit σ_{max} und ihren Hebelarm (für die noch unbekannte horizontale Drehachse) mit e und nimmt ferner an, daß sich je zwei auftretende Spannungen ebenso verhalten wie ihre Hebelarme. Wie verhält sich σ_k zu σ_{max}? Was ergeben die beiden in der vorigen Aufgabe abgeleiteten Gleichungen, wenn man σ_k mit Hilfe von σ_{max}, e und a_k ausdrückt?

Antwort: $\Sigma f_k \sigma_k = 0$ ergibt $\Sigma f_k \cdot a_k = 0$.

86. Welche Eigenschaft hat die horizontale Drehachse? (Aufg. 27.)

87. Begründe die Gleichung: $\sigma_{max} = M : \frac{J}{e}$. (Aufg. 49.)

88. Man bezeichnet die größte auftretende Zugspannung mit σ'_{max} und ihren Hebelarm mit e'. Wie groß ist σ'_{max}?

89. Welchen beiden Bedingungen muß das Biegungsmoment M genügen, wenn die zulässige Druckspannung des Trägermaterials mit k_d und die zulässige Zugspannung mit k_z bezeichnet wird?

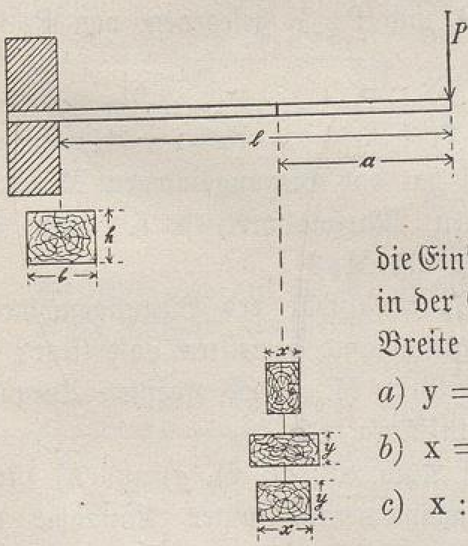
90. Welcher Bedingung muß das Biegungsmoment M für ein Pro genügen, dessen Höhe durch die horizontale Schwerlinie halbiert wird, wenn man den kleineren der Werte k_d und k_z mit k bezeichnet? Antwort: $M \leqq k_b \cdot \frac{J}{e}$.

91. Welchen Wert hat $\frac{J}{e}$ für ein Rechteck von der Breite b und der Höhe h? Welcher Bedingung muß das Biegungsmoment M für ein hochkant stehendes rechteckiges Profil genügen?

92. Welchen Wert hat $\frac{J}{e}$ für einen Kreis vom Durchmesser d?

93. Welchen Wert hat $\frac{J}{e}$ für einen Kreisring, vom äußeren Durchmesser D und inneren Durchmesser d?

94. Ein eingespannter Freiträger von der Länge l und überall rechteckigem Querschnitt ist am freien Ende durch die Einzellast P belastet. An der Einspannungsstelle ist die Breite b und die Höhe h; an den anderen Stellen soll der Querschnitt derart verkleinert sein, daß σ_{max} für alle Stellen denselben Wert wie für die Einspannungsstelle hat. Wie groß muß in der Entfernung a vom freien Ende die Breite x und die Höhe y sein, wenn:



a) y = h sein soll;

b) x = b sein soll;

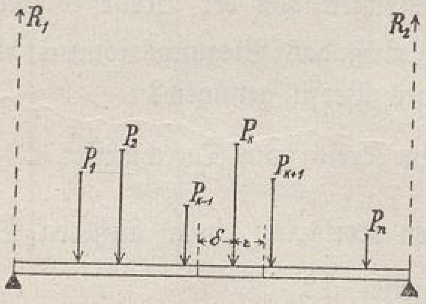
c) x : y = b : h sein soll?

95. Aufg. *94. a)*, *b)* und *c)* für denselben Freiträger, wenn die Last P gleichmäßig über die Länge l verteilt ist.

96. Ein eingespannter Freiträger von der Länge l und überall kreisförmigem Querschnitt ist *a)* am freien Ende durch die Einzellast P, *b)* durch die gleichmäßig verteilte Last P belastet. An der Einspannungsstelle ist der Durchmesser d; wie groß (x) muß derselbe in der Entfernung a vom freien Ende sein, damit dort σ_{max} denselben Wert hat, wie an der Einspannungsstelle?

97. Ein eingespannter Freiträger ist durch mehrere vertikal nach unten gerichtete Kräfte belastet. Für welche Stelle ist der (absolute) Wert des Biegungsmomentes am größten?

98. Ein an beiden Enden unterstützter Träger ist durch die vertikal nach unten gerichteten Einzelkräfte P_1, P_2, ... P_{k-1}, P_k, P_{k+1}, ... P_n belastet, welche am linken Auflager die Reaktion R_1 und am rechten Auflager die Reaktion R_2 hervorrufen. Für den Angriffspunkt von P_k ist das linksseitige positive Biegungsmoment M ermittelt. Wie groß ist das linksseitige Biegungsmoment



a) M_1 an einer zwischen P_k und P_{k-1} gelegenen, von P_k um δ entfernten Stelle;

b) M_2 an einer zwischen P_k und P_{k+1} gelegenen, von P_k um ε entfernten Stelle?

Antwort: $M_1 = M - (R_1 + P_1 + P_2 + \ldots . P_{k-1}) \cdot (-\delta)$;
$M_2 = M + (R_1 + P_1 + P_2 + \ldots . P_{k-1} + P_k) \cdot (-\varepsilon)$.

99. Unter welchen Bedingungen hat das Biegungsmoment M für den Angriffspunkt von P_k einen Maximalwert, d. h. einen Wert größer als M_1 und größer als M_2?

100. Wie bestimmt man eine Maximalstelle des Biegungsmomentes, wenn dieselbe unter einer gleichmäßig verteilten Last liegt?

101. Bestimme den (absoluten) Wert M_{max} des größten Biegungsmomentes für die Träger in Aufg. 82.

102. Berechne für die Träger in Aufg. 82. *c)*, *d)*, *g)* und *h)* für die Maximalstelle des Biegungsmomentes unter Annahme eines hochkant stehenden rechteckigen Profiles

a) die erforderliche Breite, wenn die Höhe $h = 18$ *cm* ist;

b) die erforderliche Höhe, wenn die Breite $b = 10$ *cm* ist;

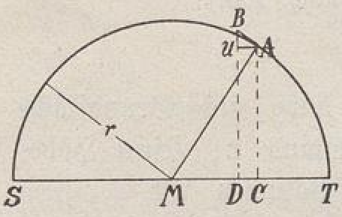
c) die erforderliche Breite und Höhe, wenn $b : h = 3 : 4$ sein soll;

und Eichenholz mit $k_b = 80$ *kg* pro *qcm* benutzt wird.

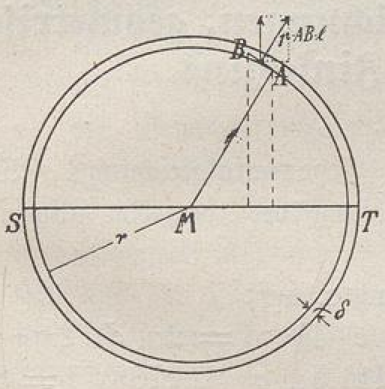
103. Berechne für die Träger in Aufg. 82. *i)* und *k)* für die Maximalstelle des Biegungsmomentes das erforderliche hochkant stehende I-Profil, wenn für Schmiedeeisen $k_b = 875$ *kg* pro *qcm* angenommen wird.

§ 7.

104. In einem Halbkreis über dem Durchmesser SMT = 2 r sei AB ein so kleines Bogenstück, daß dasselbe als Tangente im Punkte A aufgefaßt werden kann. Von A und B seien die Lote AC und BD auf den Durchmesser gefällt und AU parallel zum Durchmesser gezogen. Beweise mit Hilfe ähnlicher Dreiecke die Gleichung: $AB \cdot AC = r \cdot CD$ und bilde $\Sigma(AB \cdot AC)$ für den Halbkreis. Antwort: $\Sigma(AB \cdot AC) = 2\,r^2$.

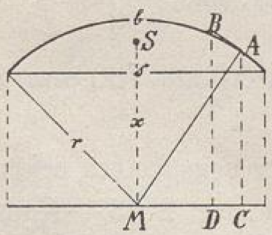


105. Auf die innere Mantelfläche eines Hohlzylinders von nebenstehendem Querschnitt und der Länge l wirke ein überall radial nach außen gerichteter Druck von der Druckstärke p. Wie groß ist die Zugkraft P, welche den Zylinder längs zwei diametral gegenüberliegenden, der Längsachse parallelen Schnitten S und T zu zerreißen sucht? Wie groß ist die hierdurch im Material hervorgerufene Zugspannung σ?



Anl. Bestimme den auf den Streifen $AB \cdot l$ wirkenden Druck und dessen zu ST senkrechte Komponente.

106. Von einem Kreisbogen sei der Radius r, die Bogenlänge b und die Sehnenlänge s bekannt. Wie weit (x) ist der Schwerpunkt S des Bogens vom Kreismittelpunkt M entfernt?

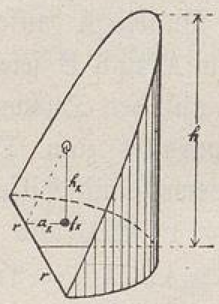


Anl. Bilde entsprechend der Aufg. *104* hier $\Sigma AB \cdot AC$ für den Bogen b.

107. Wie groß ist in der vorigen Aufgabe x für einen *a*) Halbkreisbogen; *b*) Sechstelkreisbogen; *c*) Viertelkreisbogen; *d*) Dreiviertelkreisbogen?

108. Wie weit (y) ist in Aufg. *106* und *107* der Schwerpunkt des zum Bogen b zugehörigen K r e i s a u s s c h n i t t e s vom Kreismittelpunkt entfernt?

109. Ein halbkreisförmiges Ringstück habe den äußeren Radius R und den inneren Radius r. Wie weit (x) ist sein Schwerpunkt vom Kreismittelpunkt entfernt? (Aufg. *108.*)



110. Ein Zylinderhuf habe als Grundfläche einen Halbkreis vom Radius r; seine Höhe sei h. Wie groß ist sein Volumen V? Anl. $\Sigma f_k \cdot a_k = ?$; $h_k : a_k = ?$; $\Sigma f_k \cdot h_k = ?$ (Aufg. *108.*)

XXIV. Exponentialgleichungen, geometrische Reihen und Zinseszins.

§ 1.

1. Was versteht man unter einer Exponentialgleichung? Welcher Entwicklungsschritt ist zur Auflösung derselben (im allgemeinen) erforderlich?

2. Löse nachfolgende Gleichungen nach x auf:
a) $3^x = 81$; *b)* $a^{x+3} = a^7$; *c)* $4^{3x-2} = 2$; *d)* $2^{-x} = 8$;
e) $5^x = 5{,}87$; *f)* $(3^1/_3)^x = 411{,}5$; *g)* $(2{,}1783)^{7x} = 3{,}237$.

3. Der Barometerstand am Meeresspiegel beträgt 760 *mm* Quecksilber. Wieviel beträgt der Barometerstand in der Höhe von 100 *m*? ($\log 0{,}9998749 = 0{,}9999457 - 1$.) (Vgl. XXII, Aufg. *65.*)
a) in der Höhe von 200 *m*.
b) In welcher Höhe beträgt der Barometerstand 730 *mm* Quecksilber?

4. Bei einer Kolbenluftpumpe verhält sich der vom Kolben beschriebene Raum $\varkappa$ zum Inhalt ϱ des Rezipienten wie 2 : 3. Nach wieviel (n) Kolbenspielen beträgt die Druckstärke im Rezipienten nur noch 0,1296 *Atm.* (ohne Rücksicht auf den schädlichen Raum)? (Vgl. XXI, Aufg. *50.*)

5. Der Rezipient einer Luftpumpe faßt $\varrho = 2700$ *ccm*. Wie groß ($\varkappa$) muß der vom Kolben beschriebene Raum sein, damit (ohne Rücksicht auf den schädlichen Raum) der Luftdruck im Rezipienten nach 10 Kolbenspielen auf $\frac{1}{10}$ *Atm.* gesunken ist?