



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Sammlung algebraischer Aufgaben für gewerbliche und technische Lehranstalten

nebst einer Abhandlung über das Stabrechnen

Gleichungen (3. Teil); Proportionalität; Vermischte Aufgaben; Summen; Exponentialgleichungen, geometrische Reihen, Zinseszins

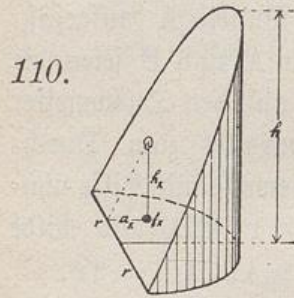
Burg, Robert

Frankfurt a.M., 1905

XXIV. Exponentialgleichungen, geometrische Reihen und Zinseszins.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-78546](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-78546)

109. Ein halbkreisförmiges Ringstück habe den äußeren Radius R und den inneren Radius r . Wie weit (x) ist sein Schwerpunkt vom Kreismittelpunkt entfernt? (Aufg. 108.)



Ein Zylinderhuf habe als Grundfläche einen Halbkreis vom Radius r ; seine Höhe sei h . Wie groß ist sein Volumen V ?

Ant. $\sum f_k \cdot a_k = ?$; $h_k : a_k = ?$; $\sum f_k \cdot h_k = ?$
(Aufg. 108.)

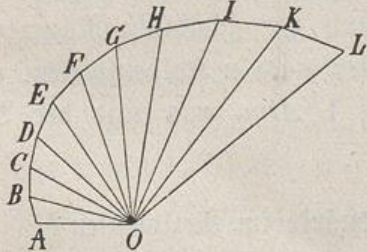
XXIV. Exponentialgleichungen, geometrische Reihen und Zinseszins.

§ 1.

- Was versteht man unter einer Exponentialgleichung? Welcher Entwicklungsschritt ist zur Auflösung derselben (im allgemeinen) erforderlich?
- Löse nachfolgende Gleichungen nach x auf:
 $a) 3^x = 81$; $b) a^{x+3} = a^7$; $c) 4^{3x-2} = 2$; $d) 2^{-x} = 8$;
 $e) 5^x = 5,87$; $f) (3^{1/3})^x = 411,5$; $g) (2,1783)^{7x} = 3,237$.
- Der Barometerstand am Meeresspiegel beträgt 760 mm Quecksilber. Wieviel beträgt der Barometerstand in der Höhe von 100 m ? ($\log 0,9998749 = 0,9999457 - 1$). (Vgl. XXII, Aufg. 65.)
 $a)$ in der Höhe von 200 m .
 $b)$ In welcher Höhe beträgt der Barometerstand 730 mm Quecksilber?
- Bei einer Kolbenluftpumpe verhält sich der vom Kolben beschriebene Raum x zum Inhalt q des Rezipienten wie $2 : 3$. Nach wieviel (n) Kolbenspielen beträgt die Druckstärke im Rezipienten nur noch $0,1296 \text{ Atm.}$ (ohne Rücksicht auf den schädlichen Raum)? (Vgl. XXI, Aufg. 50.)
- Der Rezipient einer Luftpumpe faßt $q = 2700 \text{ ccm.}$ Wie groß (x) muß der vom Kolben beschriebene Raum sein, damit (ohne Rücksicht auf den schädlichen Raum) der Luftdruck im Rezipienten nach 10 Kolbenspielen auf $\frac{1}{10} \text{ Atm.}$ gesunken ist?

§ 2.

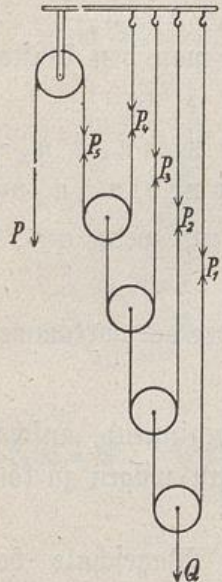
6. Wann nennt man die Reihe der Größen: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots, a_n$ eine geometrische Reihe? Wie nennt man den konstanten Wert ($a_{k+1} : a_k$)? Wie groß ist a_n ?
7. Drücke in der vorigen Aufgabe die Summe $s = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + \dots + a_n$ aus mittelst a) a_1, q und n ; b) a_1, a_n und q .
8. Welchem Grenzwert strebt die Summe s zu, wenn $q < 1$ ist und $n \infty$ wird?
9. Löse die Gleichung $s = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$ nach jeder der vorkommenden Größen auf.
10. Jemand will sich n Gewichtsstücke, mit 1 g beginnend, anschaffen, um mit denselben möglichst weit auf 1 g genau wägen zu können. Wieviel wiegt dieser Gewichtssatz, wenn:
 a) die Gewichtsstücke nur auf der einen Wageschale benutzt werden sollen;
 b) es erlaubt ist, Gewichtsstücke auch auf die Schale des zu wägenden Körpers zu legen?
11. Ein aus der Höhe h herabfallender Gummiball springt jedesmal um $\frac{4}{9}$ seiner Fallhöhe wieder empor. Welchen Weg legt der Ball im ganzen zurück und wie lange dauert die Bewegung (ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand)?
12. An ein Dreieck AOB, in welchem $AO = 9\text{ cm}$, $OB = 10\text{ cm}$ und $AB = 2,5\text{ cm}$ ist, ist das ähnliche Dreieck BOC, an dieses das ähnliche Dreieck COD u. s. f. angezeichnet, bis die Figur aus $n = 10$ Dreiecken besteht. Wie groß ist die äußere Umfangslinie ABCDEFGHIKL' und der Inhalt der ganzen Figur?



13. Die Last Q soll mittelst eines gewöhnlichen Flaschenzuges von im ganzen n Rollen gleichförmig gehoben werden. Wie groß ist die erforderliche Kraft P , wenn für jede Rolle die Zugkraft im ablaufenden Seile um 10% größer ist als im auflaufenden Seile? Wie groß (η) ist der Wirkungsgrad dieses Flaschenzuges? (Setze $1,1 = w$.)
 a) $Q = 1200\text{ kg}$; $n = 8$.

14. Wieviel Rollen muß der Flaschenzug in Aufg. 13 haben, wenn die erforderliche Kraft höchstens ein Drittel der Last betragen soll?

15.



Die Last Q soll mittelst eines Potentialflaschenzuges, der außer einer festen Rolle n lose Rollen besitzt, gleichförmig gehoben werden. Wie groß ist die erforderliche Kraft P , wenn $w = 1,1$ gesetzt wird und die Gewichte der losen Rollen nicht berücksichtigt werden? Wie groß (η) ist der Wirkungsgrad dieses Potentialflaschenzuges?
 a) $Q = 1200 \text{ kg}$; $n = 4$.

16.

Berücksichtige in der vorigen Aufgabe die Gewichte der losen Rollen, deren jedes $= G$ sei.
 a) $Q = 1200 \text{ kg}$; $n = 4$; $G = 10 \text{ kg}$.

17. Bei einer Luftverdichtungspumpe sei das Verhältnis des Rezipienteninhalts ρ zur Summe des Rezipienteninhalts ρ und des schädlichen Raumes σ mit v bezeichnet. Wieviel (G_n) Luft ist im Rezipienten nach n Kolbenspielen, wenn das spezifische Gewicht der Luft bei $1 \text{ Atm.} = s$ und der vom Kolben beschriebene Raum $= z$ ist?
 a) Wie groß (p_n) wird die Druckstärke im Rezipienten?
 b) Welchen Grenzwert hat G_n und p_n für $n = \infty$?

18. Bei einer Luftpumpe sei der vom Kolben beschriebene Raum $= z$, der Inhalt des Rezipienten $= \rho$ und der schädliche Raum $= \sigma$. Wieviel (G_n) Luft ist im Rezipienten nach n Kolbenspielen, wenn das spezifische Gewicht der Luft bei $1 \text{ Atm.} = s$ und der Bruch $\frac{\rho}{\rho + \sigma + z} = v$ gesetzt wird?

- a) Wie groß (p_n) wird die Druckstärke im Rezipienten?
 b) Welchen Grenzwert hat G_n und p_n für $n = \infty$?

19. Beweise durch Umformung der gefundenen Ausdrücke, daß in der vorigen Aufgabe:

$$G_n = \frac{\rho \cdot s}{\sigma + z} (v^n \cdot z + \sigma) \text{ und } p_n = \frac{v^n \cdot z + \sigma}{\sigma + z} \text{ Atm. ist.}$$

20. Bei der vorgenannten Luftpumpe ist $z = 620 \text{ ccm}$, $\rho = 2482 \text{ ccm}$ und $\sigma = 0,5 \text{ ccm}$. Wie groß ist die Druckstärke im Rezipienten nach 5 Zügen, ausgedrückt in mm Quecksilber?

21. Wieviel *mm* Quecksilber beträgt in der vorigen Aufgabe die geringste erreichbare Druckstärke (für $n = \infty$)?
22. Nach wieviel (n) Zügen beträgt bei der vorgenannten Luftpumpe die Druckstärke im Rezipienten noch 3 mm Quecksilber, wenn der Barometerstand $b = 750 \text{ mm}$ ist? (n ganzzahlig abgerundet).

§ 3.

23. Ein Kapital a_1 steht zu $p\%$ auf Zinsezins. Wie groß ist das Endkapital b_n am Ende des n^{ten} Jahres?
24. Wie nennt man $q = \frac{100 + p}{100}$?
25. Bestimme den Zinsfaktor q für $p = 3\%$.
a) $p = 4\frac{1}{2}\%$; b) $p = 2\frac{3}{4}\%$; c) $p = 3\frac{1}{3}\%$; d) $p = 4,6\%$.
26. Bestimme den Zinsfuß p für $q = 1,042$.
a) $q = 1,035$; b) $q = 1,0525$; c) $q = 1,0433\dots$; d) $q = 1,037$.
27. Löse die Gleichung $b_n = a_1 \cdot q^n$ auf:
a) nach a_1 ; b) nach q ; c) nach n .
28. Zu welchem Betrage wachsen 4500 M. zu $4\frac{1}{2}\%$ in 13 Jahren an?
29. Zu welchem Betrage wachsen 1700 M. in $23\frac{1}{2}$ Jahren bei einem halbjährlichen Zinsfuß von $1\frac{5}{8}\%$ an?
30. Wieviel (a_1) muß man zu $5\frac{1}{5}\%$ auf Zinsezins legen, um nach 50 Jahren 12618 M. zu erhalten?
31. Jemand will eine nach 8 Jahren fällige Schuld von 1033 M. durch Barzahlung tilgen. Wieviel muß er zahlen, wenn $p = 4\frac{1}{4}\%$ Zinsezins gerechnet wird?
32. Jemand hatte vor 5 Jahren bei einer Sparkasse 1320 M. eingezahlt und erhebt 1570 M. Wieviel (p) $\%$ hatte die Sparkasse gerechnet?
33. Zu wieviel Prozent muß ein Kapital auf Zinsezins stehen, um sich in 28 Jahren zu verdreifachen?
34. In wieviel Jahren wächst ein Kapital von 625 M. zu $4,5\%$ auf 713 M. 23 J. an?
35. In wieviel Jahren verzehnfacht sich ein Kapital, welches zu $3\frac{3}{4}\%$ auf Zinsezins steht?
36. Jemand legt zu Beginn eines jeden Jahres den Betrag r zu $p\%$ auf Zinsezins. Wieviel (b_n) beträgt sein Kapital am Ende des n^{ten} Jahres?

37. Ein Arbeiter legt zu Beginn eines jeden Jahres 120 *M.* auf die Sparkasse. Wieviel beträgt sein Vermögen am Ende des 25^{ten} Jahres, wenn die Sparkasse 3 % gibt?
38. Wieviel (r) muß man zu Beginn jedes Jahres zu 3,8 % anlegen, um nach 17 Jahren 2418,50 *M.* zu besitzen?
39. Jemand hat 18 Jahre hindurch zu Beginn jedes Jahres eine Rente von 380 *M.* erhalten. Wie groß ist die Summe aller Renten mit Zinseszins am Ende des 18^{ten} Jahres bei 4,3 %?
- a) Wieviel muß man bar zahlen, um eine solche Rente zu kaufen?
40. Aufg. 39 und 39 a), wenn die Rente am Ende jedes Jahres, also zuletzt am Ende des 18^{ten} Jahres, gezahlt wird?
41. Jemand will durch Barzahlung von 6000 *M.* eine Rente erwerben, welche 20 Jahre hindurch am Ende jedes Jahres gezahlt werden soll. Wie hoch ist die Rente bei Annahme von $3\frac{1}{3}$ %?
42. Wieviel Jahre hindurch kann man am Ende jedes Jahres eine Rente von 850 *M.* erhalten, wenn man 9000 *M.* bar einzahlt und 4 % Zinseszins gerechnet wird?
- a) Dasselbe, wenn die Rente = r und die Barzahlung = $10r$ ist?
43. Wie groß ist der Barwert einer ewigen Rente ($n = \infty$) von 500 *M.* bei Annahme von 4,6 % Zinseszins?
44. Jemand legt das Kapital a_1 zu p % auf Zinseszins und zahlt außerdem am Ende jedes Jahres den Betrag r ein. Wie groß ist sein Kapital nach n Jahren geworden?
- a) Dasselbe, wenn die n ^{te} Einzahlung des Betrages r nicht mehr erfolgt.
45. 4500 *M.* stehen zu 3,6 % auf Zinseszins. Wieviel beträgt das Endkapital nach 16 Jahren, wenn am Ende jedes Jahres (außer den Zinsen) 180 *M.* zugelegt werden?
- a) Wieviel beträgt das Endkapital nach 32 Jahren, wenn die Zulagen vom Anfang des 17^{ten} Jahres ab unterbleiben?
46. Jemand hat 4000 *M.* zu 4,3 % auf Zinseszins stehen. Wieviel (r) muß er am Ende jedes Jahres zulegen, um zu Beginn des 25^{ten} Jahres 35 000 *M.* zu besitzen?
47. Jemand hat eine Schuld von 1800 *M.* mit 4 % zu verzinsen und zahlt 12 Jahre hindurch am Ende jedes Jahres 150 *M.* ab. Wieviel beträgt seine Schuld noch nach der 12^{ten} Abzahlung?