Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

Arithmetik, Algebra, niedere Analysis.

Arithmetik, Algebra und niedere Analysis.

I. Abschnitt.

Grundoperationen und Kombinatorik.

§ 1. Benennungen.

Summe: $a + b$; a und b Summanden.

Differenz: $a - b$; a Minuend, b Subtrahend.

Produkt: $a \cdot b$; a und b Faktoren (a Multiplikator, b Multiplikand).

Quotient: $a : b$; a Dividend, b Divisor.

§ 2. Addition.

1. $a + b = b + a$.
2. $a + (b + c) = a + b + c$
$= a + c + b = b + a + c = b + c + a$
$= c + a + b = c + b + a$

2.' $a + (b + c + d + \ldots) = a + b + c + d + \ldots$
$= b + a + c + d + \ldots = \ldots$

3. $a + 0 = 0$; $0 + a = a$; $0 + 0 = 0$.

§ 3. Subtraktion.

1. Erklärung: $(a - b) + b = a$.
2. $a + b - b = a$.
3. $a - a = 0$; $a - 0 = a$; $0 - 0 = 0$.

§ 4. Negative Zahlen.

1. Erklärung: $$\left\{\begin{array}{l} 7-5=2 \\ 5-5=0 \\ 5-7=-2 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|r} (a+b)-a=b \\ a-a=0 \\ a-(a+b)=-b. \end{array}$$

$$2. \left\{\begin{array}{l} +a+(+b)=+a+b \\ -a+(+b)=-a+b \end{array}\right.$$

$$3. \left\{\begin{array}{l} +a+(-b)=+a-b \\ -a+(-b)=-a-b \end{array}\right.$$

$$4. \left\{\begin{array}{l} +a-(+b)=+a-b \\ -a-(+b)=-a-b \end{array}\right.$$

$$5. \left\{\begin{array}{l} +a-(-b)=+a+b \\ -a-(-b)=-a+b \end{array}\right.$$

Zusammenstellung:

$$\left\{\begin{array}{l} +(+b)=+b \\ -(-b)=+b \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} +(-b)=-b \\ -(+b)=-b \end{array}\right.$$

§ 5. Verbindung von Addition und Subtraktion.

Gesetze erster Stufe:

$$1. \left\{\begin{array}{l} a+(b+c)=a+b+c \\ a+(b-c)=a+b-c \\ a+(b-c-d)=a+b-c-d \\ a+(-b+c-d)=a-b+c-d. \end{array}\right.$$

$$2. \left\{\begin{array}{l} a-(b+c)=a-b-c \\ a-(b-c)=a-b+c \\ a-(-b+c-d)=a+b-c+d. \end{array}\right.$$

$$3.\ a-b+c-d=a+c-b-d=a+c-d-b$$
$$=-b+a+c-d=\ldots\ldots$$

Klammerregeln:

1. Regel: Eine Klammer, vor der ein + Zeichen steht, kann ohne weiteres weggelassen werden; jedes in der Klammer befindliche Glied behält sein Zeichen.

2. Regel: Eine Klammer, vor der ein — Zeichen steht, kann weggelassen werden, wenn alle in der Klammer befindlichen freien + in — Zeichen und umgekehrt verwandelt werden.

3. Regel: Kommen in einem Ausdruck nur $+$ und $-$ Zeichen vor, so kann eine einem $+$ Zeichen folgende Reihe von Gliedern ohne weiteres von einer Klammer umschlossen werden; die einem $-$ Zeichen folgenden Glieder dürfen nur dann von einer Klammer umschlossen werden, wenn man die von der Klammer zu umschliessenden freien $+$ in $-$ Zeichen und umgekehrt verwandelt.

§ 6. Multiplikation.

Erklärung: $\begin{cases} 3 \,.\, a = a + a + a \\ m \,.\, a = a + a + \ldots + a \text{ (m Summanden).} \end{cases}$

1. $1 \,.\, a = a$; $0 \,.\, a = 0$; $0 \,.\, 0 = 0$.
2. $a \,.\, b = b \,.\, a$.
3. $(a + b) \,.\, c = ac + bc$; $(a - b) \,.\, c = ac - bc$.

4. $\begin{cases} (a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd \\ (a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd \\ (a - b)(c + d) = ac - bc + ad - bd \\ (a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd. \end{cases}$

Zusammenstellung.

5. $\begin{cases} (+ b)(+ d) = + bd, & \text{kurz: } + \,.\, + = + \\ (+ b)(- d) = - bd, & \quad\text{„}\quad + \,.\, - = - \\ (- b)(+ d) = - bd, & \quad\text{„}\quad - \,.\, + = - \\ (- b)(- d) = + bd, & \quad\text{„}\quad - \,.\, - = + \end{cases}$

6. $(-a)(-b)(-c) = -abc$; $(-a)(-b)(-c)(-d) = +abcd$.

Bei ungerader Zahl der negativen Faktoren ist das Produkt negativ, bei gerader Anzahl positiv.

7. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
8. $(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2$.
9. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.
10. $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$.

11. Binomialtafel:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 1 \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & 3 \arrow[r] \arrow[d] & 3 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{tikzcd}$$

u. s. f.

(Binomischer Lehrsatz s. § 28.)

12. $\begin{cases} a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - a\,b + b^2) \\ a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3\,b + a^2\,b^2 - a\,b^3 + b^5) \end{cases}$

u. s. f.

13. $\begin{cases} a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + a\,b + b^2) \\ a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3\,b + a^2\,b^2 + a\,b^3 + b^4) \end{cases}$

u. s. f.

14. $\begin{cases} a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a + b)(a - b)(a^2 + b^2) \\ \qquad = (a + b)(a^3 - a^2\,b + a\,b^2 - b^3) \\ \qquad = (a - b)(a^3 + a^2\,b + a\,b^2 + b^3) \end{cases}$

u. s. f.

§ 7. Division.

Erklärung: $\begin{cases} (a : b) \,.\, b = a \\ a \,.\, b : b = a. \end{cases}$

1. $\begin{cases} (+\,a) : (+\,b) = +\,(a : b), & \text{kurz: } + : + = + \\ (-\,a) : (-\,b) = +\,(a : b), & \quad ,, \quad - : - = + \\ (+\,a) : (-\,b) = -\,(a : b), & \quad ,, \quad + : - = - \\ (-\,a) : (+\,b) = -\,(a : b), & \quad ,, \quad - : + = -. \end{cases}$

$$2. \begin{cases} a : a = 1, \quad a : 1 = a, \quad 0 : a = 0; \\ a : 0 = \infty \text{ (wobei 0 etwas unendlich Kleines);} \\ 0 : 0 = \text{unbestimmte Zahl.} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} (a + b) : m = (a : m) + (b : m) \\ (a - b) : m = (a : m) - (b : m) \\ (a - b + c - d) : m = (a : m) - (b : m) + (c : m) - (d : m). \end{cases}$$

§ 8. Verbindung von Multiplikation und Division.

Gesetze zweiter Stufe:

$$1. \begin{cases} a . (b . c) = a . b . c \\ a . (b : c) = a . b : c \\ a . (b . c : d . e) = a . b . c : d . e. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} a : (b . c) = a : b : c \\ a : (b : c) = a : b . c \\ a : (b . c : d . e) = a : b : c . d : e. \end{cases}$$

3. $a : b . c : d = a . c : b : d = c . a : b : d = c : b . a : d =$ etc.

Klammerregeln:

1. Regel: Kommen in einer Klammer nur freie Rechenzeichen zweiter Stufe vor und steht vor derselben 1. ein Multiplikations- oder 2. ein Divisionszeichen, so darf die Klammer im ersten Fall ohne weiteres, im zweiten nur dann weggelassen werden, wenn man sämtliche freien Multiplikations- in Divisionszeichen und umgekehrt verwandelt.

2. Regel: Kommen in einem Ausdruck nur Rechenzeichen zweiter Stufe vor, so kann eine beliebige einem . Zeichen folgende Reihe von Gliedern ohne weiteres von einer Klammer umschlossen werden; die einem : Zeichen folgenden Glieder dürfen nur dann von einer Klammer umschlossen werden, wenn man die von der Klammer zu umschliessenden freien . in : Zeichen und umgekehrt verwandelt.

§ 9. Klammerlose Ausdrücke.

1. Kommen in einem Ausdruck nur Rechenzeichen gleicher Stufe vor (nur + und — oder nur . und :), so darf die Reihenfolge der Glieder beliebig geändert werden, doch darf kein Divisor erstes Glied werden (s. § 5_3 und § 8_3).

2. Der Gang der Rechnung ist von links nach rechts, die höhere Rechenweise ist vor der niederen auszuführen.

§ 10. Brüche.

$$\text{Erklärung:} \begin{cases} \frac{a}{b} \cdot b = a \\ \frac{ab}{b} = a \end{cases}$$

$$1. \begin{cases} \frac{a}{a} = 1, \quad \frac{a}{1} = a, \quad \frac{0}{a} = 0 \\ \frac{a}{0} = \infty \text{ (s. § } 7,_2), \quad \frac{0}{0} = \text{unbestimmte Zahl.} \end{cases}$$

$$2. \ \frac{a}{x} \pm \frac{b}{x} = \frac{a \pm b}{x}$$

$$3. \ a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}, \quad \frac{b}{c} \cdot a = \frac{ba}{c}$$

$$4. \ \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$$

$$5. \ a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

$$6. \ \frac{an}{bn} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a:n}{b:n} = \frac{a}{b}$$

$$7. \ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$8. \begin{cases} +\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}, \quad +\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b} \\ +\frac{+a}{-b} = +\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}, \quad -\frac{+a}{-b} = -\frac{-a}{+b} = +\frac{a}{b} \\ \frac{a-b}{c-d} = \frac{b-a}{d-c} = -\frac{b-a}{c-d} = -\frac{a-b}{d-c} \end{cases}$$

§ 11. Proportionen.

Wenn $a : b = c : d$, dann ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und

1. $a : c = b : d$,	$c : a = d : b$,
$b : a = d : c$,	$c : d = a : b$,
$b : d = a : c$,	$d : b = c : a$,
	$d : c = b : a$, d. h.:

In einer Proportion kann man die inneren Glieder unter sich, die äussern Glieder unter sich vertauschen und es dürfen die inneren Glieder zu äusseren, und die äusseren zu inneren gemacht werden.

2. $ad = bc$, d. h.:

Das Produkt der äusseren Glieder ist gleich dem Produkt der inneren.

Umgekehrt: Sind zwei Produkte aus je zwei Faktoren einander gleich, so kann aus denselben eine Proportion gebildet werden. Die Faktoren des einen Produkts werden die äusseren, die des andern die innern Glieder der Proportion.

3. $am : bm = c : d$,	$(a : m) : (b : m) = c : d$,
$am : b = cm : d$,	$(a : m) : b = (c : m) : d$, d. h.:

In einer Proportion darf ein inneres und ein äusseres Glied zugleich mit derselben Zahl multipliziert oder dividiert werden.

4. $a^n : b^n = c^n : d^n$,	$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.

5. Korrespondierende Addition:

$$a:(a+b)=c:(c+d) \mid b:(a+b)=d:(c+d).$$

Korrespondierende Subtraktion:

$$a:(a-b)=c:(c-d) \mid b:(a-b)=d:(c-d).$$

Korrespondierende Addition und Subtraktion:

$$(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d).$$

Das erste oder zweite Glied einer Proportion verhält sich zur Summe oder Differenz des ersten und zweiten, wie das dritte oder vierte Glied zur Summe oder Differenz des dritten und vierten.

Die Summe des ersten und zweiten Glieds verhält sich zur Differenz derselben wie die Summe des dritten und vierten Glieds zur Differenz derselben.

6. Wenn $a:a_1=b:b_1=c:c_1=\ldots=w:1$, dann ist

$$(a+b+c+\ldots):(a_1+b_1+c_1+\ldots)=a:a_1=\ldots=w:1,$$

und

$$(am+bn+cp+\ldots):(a_1 m+b_1 n+c_1 p+\ldots)=a:a_1 =\ldots w:1.$$

7. Wenn $a:b=c:d$

$a_1:b_1=c_1:d_1$, dann ist

$$\begin{cases}(a\,a_1):(b\,b_1)=(c\,c_1):(d\,d_1) \text{ und} \\ (a:a_1):(b:b_1)=(c:c_1):(d:d_1).\end{cases}$$

8. Wenn $a:b=c:d$ und

$a:b=c:x$, dann ist

$$x=d.$$

9. Stetige Proportion: $a:x=x:b$.

10. Harmonische Proportion:

$$(a-b):(c-d)=a:d;$$

stetige harmonische Proportion:

$$(a-x):(x-b)=a:b.$$

11. a) Arithmetisches Mittel aus a und b:

$$x = \frac{a+b}{2}.$$

b) Geometrisches Mittel aus a und b:

$$x = \sqrt{a\,b}.$$

c) Harmonisches Mittel aus a und b:

$$x = \frac{2\,a\,b}{a+b}, \text{ also } \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

Bei drei Grössen a, b, c ist

$$\text{a) } x = \frac{a+b+c}{3}, \quad \text{b) } x = \sqrt[3]{a\,b\,c}, \quad \text{c) } \frac{1}{x} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

§ 12. Potenzen mit ganzen Exponenten.

I. Positive, ganze Exponenten.

$$\begin{cases} a^3 = a\,.\,a\,.\,a \\ a^m = a\,.\,a\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,a \text{ (m Faktoren)}, \end{cases}$$

a heisst Basis, m Exponent, a^m Potenz.

1. $a^1 = a,\ 0^n = 0,\ 1^n = 1,\ a^0 = 1;\ a^\infty = \begin{cases} 0 \\ 1, \text{ wenn } a \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 1. \\ \infty \end{cases}$

2. $\begin{cases} (-1)^{2n} = +1, \quad (-1)^{2n+1} = -1 \\ (-a)^{2n} = +a^{2n}, \quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1} \\ (a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}, \quad (a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1}. \end{cases}$

3. $a^m \,.\, a^r = a^{m+r}$

$$a^m : a^r = \begin{cases} a^{m-r}, & \text{wenn } m > r \\ 1, & \text{,, } m = r \\ \dfrac{1}{a^{r-m}}, & \text{,, } m < r \end{cases}$$

4. $(a\,b)^m = a^m\,b^m$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

6. $(a^m)^r = a^{m\,r}$

7. $\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}$.

8. $\left.\frac{a^m - b^m}{a - b}\right|_{a=b} = \frac{0}{0} = m\,a^{m-1}$.

II. Negative Exponenten.

Erklärung: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

1. $\begin{cases} a^m \cdot a^{-r} = a^{m-r} \\ a^{-m} \cdot a^r = a^{-m+r} \\ a^{-m} \cdot a^{-r} = a^{-m-r} = a^{-(m+r)}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} a^m : a^{-r} = a^{m+r} \\ a^{-m} : a^r = a^{-m-r} \\ a^{-m} : a^{-r} = a^{-m+r}. \end{cases}$

3. $(ab)^{-m} = a^{-m}b^{-m}$.

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$.

5. $\begin{cases} (a^m)^{-r} = a^{-mr} \\ (a^{-m})^r = a^{-mr} \\ (a^{-m})^{-r} = a^{mr}. \end{cases}$

§ 13. Wurzeln.

Erklärung: Wenn $x^n = a$, dann $x = \sqrt[n]{a}$, also

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \quad \sqrt[n]{a^n} = a$$

Benennungen: Bei $\sqrt[n]{a}$ heisst a Radikand, n Wurzelexponent;

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$$

I. Wurzelformeln:

1. $\sqrt[n]{1} = 1;\ \sqrt[n]{0} = 0;\ \sqrt[2n+1]{1} = 1;\ \sqrt[2n+1]{-1} = -1.$

2. $\sqrt[1]{a} = a;\quad \sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a,\quad \sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}} = -a;$

$\sqrt[2n]{(-a)^{2n}} = -a.$

3. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$

4. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$

5. $\sqrt[n]{a^r} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^r.$

6. $\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[nx]{a^{rx}};\quad \sqrt[-n]{a^r} = \sqrt[n]{a^{-r}}.$

7. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$

8. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}.$

II. Rationalmachen des Nenners:

1. $\frac{z}{\sqrt{a}} = \frac{z\sqrt{a}}{a};\quad \frac{z}{\sqrt[n]{a}} = \frac{z\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}.$

2. $\frac{z}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{z(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b};$

$$\frac{z}{\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}} = \frac{z\left(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right)}{a \pm b}$$

3. $\frac{z}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{z(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 - c}$

$$= \frac{z(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2 - 4ab};$$

besonderer Fall $a + b = c$.

4. $$\frac{z}{\sqrt{a+\sqrt{b}}} = \frac{z\sqrt{a+\sqrt{b}}}{a+\sqrt{b}} = \frac{z\sqrt{a+\sqrt{b}}(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$$
$$= \frac{z\sqrt{(a^2-b)(a-\sqrt{b})}}{a^2-b}.$$

III. Zerlegung einer Quadrat-Wurzel:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+r}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-r}{2}}, \text{ wobei } r = \sqrt{a^2-b}.$$

IV. Beispiele für Quadrat- und Kubikwurzelausziehung:

1. $\sqrt{12|53|16} = 354$

```
   9
 6|353
   325
70|2816
   2816
   ====
```

2. $\sqrt[3]{44|361|864} = 354$

```
      27
    27|17361
      |135
        225
         125
  3675|1486864
      |14700
         1680
           64
      =======
```

3. $\sqrt{\left(25x^6 - 30x^5 + 79x^4 - 57x^3 + 58x^2 - 21x + \frac{9}{4}\right)}$

$$\begin{array}{l}
\underline{\pm 25x^6} \qquad\qquad\qquad\qquad = 5x^3 - 3x^2 + 7x - \frac{3}{2} \\
10x^3 \,|\, -30x^5 + 79x^4 \\
\qquad\;\; \underline{\mp 30x^5 \pm 9x^4} \\
10x^3 - 6x^2 \,|\, +70x^4 \\
\qquad\qquad\quad \underline{\pm 70x^4 \mp 42x^3 \pm 49x^2} \\
10x^3 - 6x^2 + 14x \,|\, -15x^3 + 9x^2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\mp 15x^3 \pm 9x^2 \mp 21x \pm \frac{9}{4}} \\
\qquad\qquad\qquad\quad = \quad = \quad = \quad =
\end{array}$$

4. $\sqrt[3]{(125x^9 - 225x^8 + 660x^7 - 657x^6 + 924x^5 - 441x^4 + 343x^3)}$

$$\begin{array}{l}
\underline{\pm 125x^9} \qquad\qquad\qquad\qquad = 5x^3 - 3x^2 + 7x \\
75x^6 \,|\, -225x^8 \\
\qquad\;\; \underline{\mp 225x^8 \pm 135x^7 \mp 27x^6} \\
75x^6 - 90x^5 + 27x^4 \,|\, +525x^7 - 630x^6 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \pm 525x^7 \mp 630x^6 \pm 189x^5 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\pm 735x^5 \mp 441x^4 \pm 343x^3} \\
\qquad\qquad\qquad\quad = \quad = \quad = \quad = \quad =
\end{array}$$

§ 14. Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Erklärung: $a^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{a^r}$; $a^{-\frac{r}{n}} = a^{\frac{-r}{n}} = a^{\frac{r}{-n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{r}{n}}} = \sqrt[n]{a^{-r}}$

$$= \sqrt[-n]{a^r} = \frac{1}{\sqrt{a^r}}$$

1. $1^{\frac{r}{n}} = 1$; $0^{\frac{r}{n}} = 0$.
2. $a^{\frac{r}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{n} + \frac{p}{q}}$.
3. $a^{\frac{r}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{n} - \frac{p}{q}}$.

4. $(a\,b)^{\frac{r}{n}} = a^{\frac{r}{n}}\,b^{\frac{r}{n}}$.

5. $(a : b)^{\frac{r}{n}} = a^{\frac{r}{n}} : b^{\frac{r}{n}}$.

6. $\left(a^{\frac{r}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{n} \cdot \frac{p}{q}}$.

§ 15. Imaginäre und komplexe Zahlen.

Erklärung: $\sqrt{-1} = i$ (imaginäre Einheit),
$\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$ (imaginäre Zahl),
$a + b\,i$ (komplexe Zahl; Normalform).

1. $i = i$ $\qquad i^{4n} = +1$
$i^2 = -1$ $\qquad i^{4n+1} = i$
$i^3 = -i$ $\qquad i^{4n+2} = -1$
$i^4 = +1$ $\qquad i^{4n+3} = -i$.

2. $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = i^2\sqrt{a\,b} = -\sqrt{a\,b}$; $(\sqrt{-a})^2 = -a$;
$\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{a : b}$.

3. Konjugierte komplexe Zahlen: $a + bi$ und $a - bi$,
$(a + b\,i)(a - b\,i) = a^2 + b^2$.

4. Wenn $a + bi = 0$, dann ist $a = 0$ und $b = 0$,
„ $a + bi = x + iy$, dann ist $a = x$, $b = y$.

5. Setzt man: $a = r\cos\varphi$ (φ Anomalie),
$b = r\sin\varphi$ (r Modulus),
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$, dann ist
$\underline{a \pm b\,i = r\,(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)}$ (Kanonische Form)

allgemeiner:

$$\mathbf{a \pm b\,i = r\,\big((\cos\varphi + 2\,k\,\pi) \pm i\sin(\varphi + 2\,k\,\pi)\big)}.$$

6. $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)(\cos\psi \pm i\sin\psi)$
$= \cos(\varphi + \psi) \pm i\sin(\varphi + \psi)$.

7. Moivre's Formel:

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}(2k\pi+\varphi) \pm i\sin\frac{m}{n}(2k\pi+\varphi);$$

im einzelnen: $(\cos\varphi \pm \sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi$

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi+\varphi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi+\varphi}{n}.$$

§ 16. Logarithmen.

Erklärung: Wenn $c^x = a$, dann ist $x = \overset{c}{\log}\, a$, daher

$$c^{\overset{c}{\log}\, a} = a;\quad \overset{c}{\log}\,(c^n) = n;\quad \overset{c}{\log}\,(c^{-n}) = -n$$

c heisst die Basis, a der Logarithmand, n der Logarithmus.

1. $\log ab = \log a + \log b$
2. $\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$
3. $\log a^n = n \log a$
4. $\log\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log a$
5. $\overset{c}{\log}\, c = 1;\ \overset{c}{\log} 1 = 0;\ \overset{c}{\log} 0 = -\infty;\ \overset{c}{\log}\infty = \infty$
6. die Basis der künstlichen, oder gemeinen, oder Briggschen Logarithmen ist 10; die Basis der natürlichen Logarithmen, welche mit log nat, oder log n oder l bezeichnet werden, ist $e = 2{,}71828\ldots$ (s. § 29)
7. $\overset{b}{\log}\, a = \dfrac{\overset{c}{\log}\, a}{\overset{c}{\log}\, b};\quad \overset{c}{\log}\, a = \overset{b}{\log}\, a \,.\, \overset{c}{\log}\, b$
8. Umrechnung der gemeinen in natürliche Logarithmen:

a) $l\,10 = \overset{e}{\log}\,10 = \dfrac{\overset{10}{\log}\,10}{\overset{10}{\log}\,e} = \dfrac{1}{0{,}43429\ldots} = 2{,}30259\ldots$

$$\text{b) } l\,a = \overset{e}{\log}\, a = \frac{\overset{10}{\log}\, a}{\overset{10}{\log}\, e} = \overset{10}{\log}\, a \,.\, 2{,}30259\ldots$$

Weiteres über Logarithmen s. § 29.

§ 17. Kettenbrüche.

1. Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Kettenbruch:

$$\text{a) } \frac{14}{47} = \frac{1}{\frac{47}{14}} = \frac{1}{3+\frac{5}{14}} = \frac{1}{3+\frac{1}{\frac{14}{5}}} = \frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{4}{5}}}$$

$$= \frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{5}{4}}}} = \frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}}$$

$$\text{b) } \begin{array}{r|r|r|r|l} 14 & 47 & 3 & & \\ & 42 & & & \\ & 5 & 14 & 2 & \\ & & 10 & & \\ & & 4 & 5 & 1 \\ & & & 4 & \\ & & & 1 & 4 \mid 4 \end{array}$$

die Nenner sind 3, 2, 1, 4.

2. Statt eines Kettenbruches k kann man stets folgenden schreiben:

$\dfrac{1}{0+\dfrac{1}{0+k}}$, dessen erster Näherungswert $\dfrac{1}{0}$, dessen zweiter $\dfrac{0}{1}$ ist.

3. Verwandlung eines Kettenbruches in einen gewöhnlichen Bruch.

Sind $\frac{A_1}{B_1}$, $\frac{A_2}{B_2}$ u. s. f. die einzelnen Näherungswerte des Kettenbruches $\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$, so ist:

$$\frac{A_{r+1}}{B_{r+1}} = \frac{a_{r+1} A_r + A_{r-1}}{a_{r+1} B_r + B_{r-1}};\ \frac{A_1}{B_1} = \frac{1}{a_1};\ \frac{A_2}{B_2} = \frac{a_2}{a_2 a_1 + 1}$$

u. s. f.

Schema:

$$\begin{array}{c|c||c|c|c}
 & & a_1 & a_2 & a_3 \\
\hline
\frac{1}{0} & \frac{0}{1} & \frac{1}{a_1} & \frac{a_2}{a_2 a_1 + 1} & \frac{a_3 a_2 + 1}{a_3 (a_2 a_1 + 1) + a_1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c||c|c|c|c}
 & & 3 & 2 & 1 & 4 \\
\hline
\frac{1}{0} & \frac{0}{1} & \frac{1}{3} & \frac{2}{7} & \frac{3}{10} & \frac{14}{47}
\end{array}$$

4. $A_{r-1} . B_r - A_r . B_{r-1} = (-1)^r$

$$\frac{A_{r-1}}{B_{r-1}} - \frac{A_r}{B_r} = \frac{(-1)^r}{B_{r-1} . B_r}$$

$$\frac{A_{r-1}}{B_{r-1}} - \frac{A_r}{B_r} < \frac{(-1)^r}{B^2_{r-1}}$$

5. Sätze:
   1. Die aufeinanderfolgenden Näherungswerte (N.-W.) eines Kettenbruches sind abwechselnd grösser und kleiner als der wahre Wert derselben und zwar sind die ungeraden (der 1., 3. . . .) grösser, die geraden (der 2., 4. . . . .) kleiner als der wahre Wert des Kettenbruches.
   2. Jeder N.-W. liegt dem wahren Wert des K.-Br. näher als der vorhergehende.
   3. Der Unterschied des wahren Wertes des K.-Br.

und eines N.-W. ist kleiner als der reziproke Wert des Quadrates vom Nenner dieses N.-W.
4. Die N.-W. eines K.-Br. sind in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, d. h. Zähler und Nenner sind relative Primzahlen.
5. Kein Bruch, dessen Nenner kleiner ist als der Nenner eines N.-W., kommt dem wahren Wert des K.-Br. näher als dieser N.-W.

§ 18. Kombinationslehre.

I. Permutationen.

1. Die Permutationen aus n Elementen bestehen aus den Komplexionen, in denen sämtliche Elemente vorkommen; die Gruppen unterscheiden sich nur durch die Stellung der Elemente.

Die Permutationen von a, b, c, d sind:

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

2. Die Anzahl der Permutationen aus n verschiedenen Elementen ist:

$$P(n) = 1 . 2 . 3 \ldots (n-1) . n$$
$$= n! \text{ („n Fakultät“)}$$

3. Sind unter den nElementen α unter sich gleiche Elemente, ebenso ferner β und γ je unter sich gleiche Elemente, so ist die Anzahl der Permutationen:

$$\underset{(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}{P\ (n)} = \frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!}$$

Bestehen die n Elemente aus 2 Gruppen von r und n — r je unter sich gleichen Elementen, dann ist die Anzahl:

$$P_{(r,\, n-r)}(n) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-r+1)}{r!}$$
$$= \binom{n}{r}, \text{ vergl. § 21.}$$

4. Irgend zwei Elemente einer Komplexion bilden eine Nichtfolge (Inversion), wenn das erste Element höher ist als das zweite.

Durch Vertauschung zweier Elemente einer Komplexion ändert sich die Zahl der Nichtfolgen um eine ungerade Zahl.

II. Variationen.

5. Die Variationen aus n Elementen der rten Klasse bestehen aus allen Komplexionen, die sich aus je r der n Elemente bilden lassen. Die Variationen zweiter Klasse der 4 Elemente a b c d sind:

ohne Wiederholung			mit Wiederholung			
ab	ac	ad	aa	ab	ac	ad
ba	bc	bd	ba	bb	bc	bd
ca	cb	cd	ca	cb	cc	cd
da	db	dc	da	db	dc	dd

6. Die Anzahl der Variationen aus n Elementen zur rten Klasse ist

$$V_r(n) = n(n-1)(n-2)\ldots.(n-r+1) = \binom{n}{r}.r! \text{ (s. § 21)}$$
$$V_n(n) = n(n-1)(n-2)\ldots.1 = n! \text{ (Permutationen).}$$

7. Die Anzahl der Variationen mit Wiederholung ist: $V'_r(n) = n^r$.

III. Kombinationen.

8. Die Kombinationen aus n Elementen zur rten Klasse sind die Komplexionen, die sich aus je r der

n Elemente bilden lassen, wobei aber blosse Verstellung der Glieder keine neue Kombination ergiebt.

Die Kombinationen der vier Elemente a, b, c, d zur zweiten Klasse sind:

ohne Wiederholung: ab, ac, ad, bc, bd, cd;

mit " aa, ab, ac, ad; bb, bc, bd; cc, cd; dd.

9. Die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur rten Klasse ist

$$K_r(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Aus den Kombinationen ergeben sich die Variationen, wenn man die Elemente der einzelnen Kombinationen permutiert.

10. Die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur rten Klasse mit Wiederholung ist

$$K'_r(n) = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+r-1)}{r!} = \binom{n+r-1}{r}.$$

§ 19. Determinanten.

1. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Unter der Determinante eines Systems von n^2 Elementen $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots\ldots$ versteht man die Summe $\Sigma(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots)$, in welcher jedes Glied alle Buchstaben und Indices ohne Wiederholung enthält und welche zugleich alle möglichen Produkte umfasst, die durch Permutation der Indices gebildet werden können. Jedes (alphabetisch geordnete) Glied ist positiv oder negativ zu setzen, je nachdem die Anzahl der Nichtfolgen der Indices gerade oder ungerade ist.

2. Der Wert einer Determinante wird nicht geändert, wenn die Vertikal- als Horizontalreihen und umgekehrt geschrieben werden. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

3. Werden irgend zwei Horizontal- oder zwei Vertikalreihen mit einander vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

4. Sind in einer Determinante zwei Horizontal- oder zwei Vertikalreihen völlig übereinstimmend, so ist der Wert der Determinante gleich Null.

5. Bezeichnet man in einer Determinante $\varDelta$ den Faktor von a_r mit A_r (Unterdeterminante), den von b_r mit B_r, dann ist

$$\begin{aligned} \varDelta &= a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots\ldots + a_n A_n \\ &= b_1 B_1 + b_2 B_2 + \ldots\ldots + b_n B_n \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \text{ ferner ist} \end{aligned}$$

$$b_1 A_1 + b_2 A_2 + \ldots + b_n A_n = c_1 A_1 + c_2 A_2 + \ldots + c_n A_n = 0.$$

6. Wenn alle Elemente einer Horizontal- oder einer Vertikalreihe mit demselben Faktor multipliziert sind, so ist die Determinante mit diesem Faktor multipliziert. Z. B.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Sind alle Elemente einer Reihe 0, so ist die ganze Determinante gleich Null.

7. Wenn jedes Element einer Reihe eine Summe zweier Grössen ist, so ist die Determinante in die Summe zweier Determinanten zerlegbar; z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

oder: $(a_1+\alpha_1)A_1+(a_2+\alpha_2)A_2+(a_3+\alpha_3)A_3=a_1A_1+a_2A_2$
$+a_3A_3+\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\alpha_3A_3.$

Bestehen die Glieder einer Reihe aus m, die einer andern aus n und die einer dritten aus p Summanden, so ist die Determinante in m. n. p Determinanten zerlegbar.

8. Der Wert einer Determinante bleibt unverändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe beliebige, gleich vielfache der entsprechenden Elemente einer andern Reihe addiert; z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+ka_1 \\ a_2 & b_2 & c_2+ka_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+ka_3 \end{vmatrix}$$

9. Wenn

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ und } \varDelta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \text{ dann ist}$$

$$D\,.\,\varDelta = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

10. Wenn alle diejenigen Elemente einer Determinante verschwinden, welche m Vertikal- mit n — m Horizontalreihen gemeinschaftlich haben, so lässt sich dieselbe in das Produkt zweier Determinanten zerlegen; z. B.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 0 & c_4 & d_4 & e_4 \\ 0 & 0 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & d_3 & e_3 \\ c_4 & d_4 & e_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

11. Jede Determinante kann auf folgende Weise erweitert werden:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \beta_4 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

§ 20. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1. Ist für ein Ereignis die Anzahl aller möglichen Fälle m, die der günstigen Fälle (Treffer) t, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen:

$$w = \frac{t}{m},$$

für das Nichteintreffen

$$u = \frac{m - t}{m} = 1 - w, \text{ also}$$

$$\text{I. } w + u = 1.$$

2. Ist bei m möglichen Fällen $w_1 = \frac{t_1}{m}$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses E_1 und $w_2 = \frac{t_2}{m}$ diejenige für das Eintreffen von E_2, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass entweder E_1 oder E_2 eintrifft:

$$\text{II. } W = w_1 + w_2.$$

3. Die Wahrscheinlichkeit, dass mehrere Ereignisse E_1, E_2, E_3 ... gleichzeitig (oder nacheinander) eintreffen, ist:

$$\text{III. } W = w_1 \,.\, w_2 \,.\, w_3 \ldots .$$

4. Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei Ereignissen E_1 und E_2 das erste eintrifft, ist

$$\text{IV. } W = \frac{w_1}{w_1 + w_2}.$$

5. Soll von zwei Ereignissen E_1 und E_2 eintreten:
1. E_1 und E_2, so ist $W = w_1 \,.\, w_2$;
2. E_1, aber nicht E_2, so ist $W = w_1 (1 - w_2)$;
3. E_1 nicht, aber E_2, so ist $W = (1 - w_1) \,.\, w_2$;
4. Eines, aber nicht beide, so ist $W = w_1 (1 - w_2) + (1 - w_1) \,.\, w_2$;
5. Höchstens eines von beiden, so ist $W = 1 - w_1 w_2$;
6. Wenigstens eines von beiden, so ist $W = w_1 + w_2 - w_1 w_2$;
7. Beide oder keines, so ist $W = 1 - w_1 (1 - w_2) - (1 - w_1) w_2$;
8. E_1 n mal, E_2 m mal in bestimmter Reihenfolge, dann ist $W = w_1^n \,.\, w_2^m$; ist die Reihenfolge beliebig, dann ist
$$W = \frac{(n+m)!}{n!\,m!} w_1^n \,.\, w_2^m.$$

§ 21. Binomialkoeffizienten.

1. Der Bruch $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{r!} = \dbinom{n}{r}$, gelesen „n über r“, heisst Binomialkoeffizient.

2. Ist n positiv und ganz, so wird $\dbinom{n}{r} = 0$, wenn

Arithmetik, Algebra und niedere Analysis.

I. Abschnitt.

Grundoperationen und Kombinatorik.

§ 1. Benennungen.

Summe: $a + b$; a und b Summanden.

Differenz: $a - b$; a Minuend, b Subtrahend.

Produkt: $a \cdot b$; a und b Faktoren (a Multiplikator, b Multiplikand).

Quotient: $a : b$; a Dividend, b Divisor.

§ 2. Addition.

1. $a + b = b + a$.

2. $a + (b + c) = a + b + c$
$= a + c + b = b + a + c = b + c + a$
$= c + a + b = c + b + a$

2.′ $a + (b + c + d + \ldots) = a + b + c + d + \ldots$
$= b + a + c + d + \ldots = \ldots$

3. $a + 0 = 0$; $0 + a = a$; $0 + 0 = 0$.

§ 3. Subtraktion.

1. Erklärung: $(a - b) + b = a$.

2. $a + b - b = a$.

3. $a - a = 0$; $a - 0 = a$; $0 - 0 = 0$.

$r > n$; ist aber n gebrochen oder negativ, so wird $\binom{n}{r}$ für keinen Wert von r Null.

$$\binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{0} = 1.$$

3. $$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}.$$

4. $$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}.$$

5. $$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \binom{n-2}{r} + \ldots + \binom{r}{r}.$$

6. $$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{r}\binom{n}{o} + \binom{m}{r-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{r-2}\binom{n}{2} + \ldots + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{m}{o}\binom{n}{r}.$$

II. Abschnitt.

Reihen.

A. Endliche Reihen.

§ 22. Arithmetische Reihen erster Ordnung.

Reihe: $a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots a+(n-1)d.$

1. $z = a + (n-1)d.$
2. $$s = \frac{(a+z)\,.\,n}{2} = \frac{(2a+(n-1)d)\,.\,n}{2}.$$

§ 23. Geometrische Reihen.

Reihe: $a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3 \ldots aq^{n-1}.$

1. $z = aq^{n-1}.$
2. $$s = \frac{a(q^n-1)}{q-1} = \frac{qz-a}{q-1}.$$

3. Ist $n = \infty$ und $0 < q < 1$, dann ist $s = \frac{a}{1-q}$.

4. $$\left.\begin{aligned} 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots &= \frac{1}{1-x} \\ 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots &= \frac{1}{1+x} \end{aligned}\right\} \; 0 < x < 1.$$

§ 24. Zinseszins- und Rentenrechnung.

Zinsfuss $p\,\%$, Zinsfaktor $q \left(= 1 + \frac{p}{100}\right)$, ursprüngliches Kapital a, angewachsenes b, Zahl der Zinsperioden (Jahre) n, Rente r.

1. $b = a q^n$ (Zinseszinsformel).

2. $b = a q^n \pm \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$ (erste Rentenformel).

3. $b = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$ (zweite Rentenformel).

4. $b = \frac{r q (q^n - 1)}{q - 1}$ (dritte Rentenformel).

5. $a = r \cdot \frac{q^n - 1}{(q-1) \cdot q^n} = \frac{r}{q-1}\left(1 - \frac{1}{q^n}\right)$.

5'. $a = \frac{r}{q-1}$ $(n = \infty)$.

6. $b q^n = b \frac{p_1}{100} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

1. Giebt den Endwert an, auf den das Kapital a in n Jahren durch Zinseszins anwächst.

2. Giebt den Endwert an, den a durch Zinseszins erreicht, wenn dasselbe am Ende jedes Jahres noch um r vermehrt oder vermindert wird; wird a in n Jahren aufgezehrt, so ist $b = 0$.

3. Giebt die Summe an, welche bis zum Ende des

nten Jahres erreicht ist, durch eine am Ende jedes Jahres erfolgende Zahlung r.

4. Stellt denselben Wert dar wie 3, wofern die Zahlung r am Jahresanfang geleistet wird.

5. a ist das Ablösungskapital (Mise) einer n mal am Jahresende wiederkehrenden Rente.

5'. a Ablösungskapital einer immerwährenden Rente.

6. Amortisation. Die Gleichung giebt die Bedingung an, unter der ein Kapital b in n Jahren durch Verzinsung mit p_1 % getilgt werden kann, wenn der Zinsfaktor (bei dem üblichen Zinsfuss p) q ist.

§ 25. Arithmetische Reihen höherer Ordnung.

1. Reihe: $y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \ldots y_n$

erste Differenzenreihe: $\Delta y_0 \quad \Delta y_1 \quad \Delta y_2 \quad \Delta y_3 \ldots$

zweite „ $\Delta^2 y_0 \quad \Delta^2 y_1 \quad \Delta^2 y_2 \ldots$

dritte „ $\Delta^3 y_0 \quad \Delta^3 y_1 \ldots$

$$\Delta^{r+1} y_m = \Delta^r y_{m+1} - \Delta^r y_m.$$

Ist die rte Differenzenreihe konstant, so ist die Reihe von der rten Ordnung.

$$2.\ y_n = y_0 + \binom{n}{1} \Delta y_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{n}{3} \Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{n}{r} \Delta^r y_0.$$

Sätze: 1. Das Glied y_n einer Reihe rter Ordnung ist eine ganze Funktion rten Grades von n.

2. Ist $y_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 \ldots + a_r n^r$ also eine ganze Funktion rten Grades von n, so ist die Reihe, welche man erhält, indem man $n = 0, 1, 2 \ldots$ setzt, von rter Ordnung.

Wenn die Reihe mit y_1 anfängt, dann ist:

$$y_n = y_1 + \binom{n-1}{1} \Delta y_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 y_1 + \binom{n-1}{3} \Delta^3 y_1 + \ldots + \binom{n-1}{r} \Delta^r y_1.$$

3. $$\mathbf{s_n} = \binom{\mathbf{n+1}}{\mathbf{1}} \mathbf{y_0} + \binom{\mathbf{n+1}}{\mathbf{2}} \Delta \mathbf{y_0} + \binom{\mathbf{n+1}}{\mathbf{3}} \Delta^2 \mathbf{y_0} + \ldots + \binom{\mathbf{n+1}}{\mathbf{r+1}} \Delta^r \mathbf{y_0}$$

oder bei der zweiten Bezeichnung:

$$s_n = \binom{n}{1} y_1 + \binom{n}{2} \Delta y_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 y_1 + \ldots + \binom{n}{r+1} \Delta^r y_1.$$

4. $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}(2n+1)(n+1).n;$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2.n^2.$$

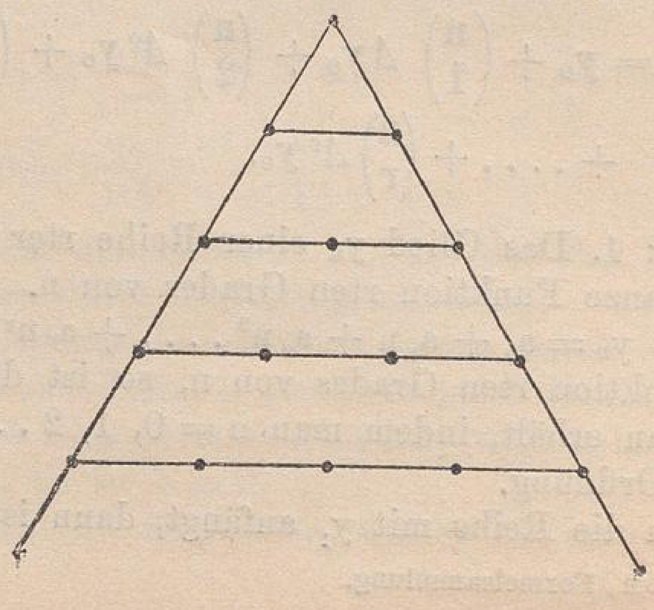
5. Figurierte Zahlen.

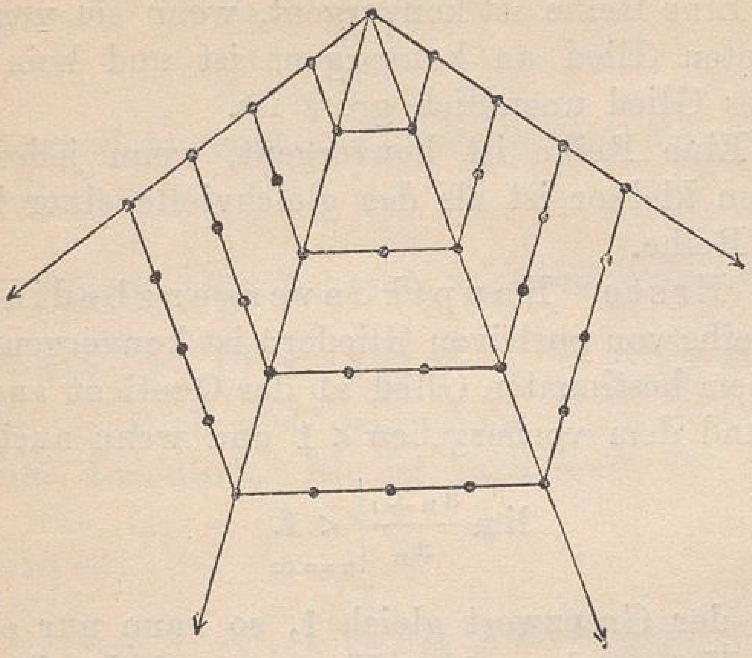
a. Polygonalzahlen:

Dreieckszahlen: 1 3 6 10 15 21 ...., $\binom{n+1}{2}$.

Viereckszahlen: 1 4 9 16 25 ...., n^2,

Fünfeckszahlen: 1 5 12 22 35 ...., $\frac{3n^2 - n}{2}$.





b) Pyramidalzahlen.

dreieckige: 1 4 10 20 35 ...., $\binom{n+1}{2} + 1 \cdot \binom{n+1}{3}$

$= \binom{n+2}{3}$,

viereckige; 1 5 14 30 55 ...., $\binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$,

fünfeckige: 1 6 18 40 75 ...., $\binom{n+1}{2} + 3\binom{n+1}{3}$.

B. Unendliche Reihen.

§ 26. Konvergenzbedingungen.

1. Eine Reihe $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots. + a_n$ heisst konvergent, wenn die Grenze von s_n bei unbegrenzt wachsendem n eine endliche Zahl ist.

2. die abnehmende geometrische Reihe ist konvergent, also $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots..$ ist konv., wenn der absolute Betrag von $x < 1$.

3. Eine Reihe ist konvergent, wenn sie von einem bestimmten Glied an konvergent ist und kein vorangehendes Glied unendlich gross ist.

4. Eine Reihe ist konvergent, wenn jedes Glied derselben kleiner ist als das gleichvielte einer konvergenten Reihe.

5. Erste Hauptkonvergenzbedingung: Eine Reihe von positiven Gliedern ist konvergent, wenn von einem bestimmten Glied ab der Quotient aus einem Glied und dem vorhergehen < 1 und wenn auch

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}\Bigg|_{n=\infty} < 1.$$

Ist der Grenzwert gleich 1, so kann nur eine besondere Untersuchung über Konvergenz oder Divergenz entscheiden.

6. Zweite Hauptkonvergenzbedingung: Eine Reihe mit abwechselnden Zeichen konvergiert, wenn die Glieder von einer bestimmten Stelle an abnehmen und $\lim a_n = 0$

(Bei einer Reihe mit gleichen Zeichen ist diese Bedingung notwendig, aber nicht hinreichend.)

7. Jede Reihe mit negativen oder abwechselnden Gliedern ist konvergent, wenn sie konvergiert, falls man alle Glieder positiv setzt.

8. Eine Reihe heisst divergent, wenn $\lim s_n$ nicht endlich ist. Dies ist der Fall, wenn $\lim a_n$ nicht 0 ist.

§ 27. Satz von der Koeffizientenvergleichung.

Ist

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots$$

und sind beide Reihen konvergent, so ist

$$A_0 = B_0$$
$$A_1 = B_1$$
$$A_2 = B_2 \text{ u. s. f.}$$

Dieser Satz dient zur Entwickelung von Funktionen in Reihen.

§ 28. Binomischer Lehrsatz — Newtonsche Reihe.

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{r} x^r + \ldots$$

Für negative und gebrochene Werte von n wird die Reihe unendlich. Sie ist konvergent für

$$1 > x > -1.$$

Beispiel:

$$\sqrt{a^2+b^2} = a\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = a\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2}+\binom{\frac{1}{2}}{2}\frac{b^4}{a^4}+\ldots\right)$$

Ist b gegen a sehr klein, dann ist

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a} \quad \text{(Näherungsformel.)}$$

$$\sqrt[3]{a^3 \pm b} = a \pm \frac{b}{3a^2} \quad \text{"}$$

§ 29. Exponentialreihe, logarithmische, trigonometrische und cyklometrische Reihen.

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n_{n=\infty}$$
$$= 2{,}7182818284 \ldots.$$

2. $a^x = e^{x\,la} = 1 + \frac{x\,la}{1!} + \frac{(x\,la)^2}{2!} + \frac{(x\,la)^3}{3!} + \ldots$

3. $l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots, \; 1 \geq x > -1$

4. $l(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots 1 > x > -1$

5. $$\begin{cases} l\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right\} 1 > x > -1 \text{ oder} \\ l\,z = 2\left\{\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right\} \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} l(a+h) - l\,a = 2\left\{\frac{h}{2a+h} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{2a+h}\right)^3 + \ldots\right\} \\ \log(a+h) = \log a + 2M\left\{\frac{h}{2a+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2a+h}\right)^3 + \ldots\right\} \end{cases}$$

7. Uebergang vom natürlichen zum Briggschen System:

$$10^{\overset{10}{\log} z} = z$$

$$\overset{10}{\log} z \,.\, l\,10 = l\,z$$

$$\mathbf{\overset{10}{\log}\, z = \frac{\mathit{l}\, z}{\mathit{l}\, 10} = M_{10} \,.\, \mathit{l}\, z}$$

M_{10} = Modulus des Briggschen Systems $= \frac{1}{l\,10}$
$= 0{,}4342945 \ldots$ (s. auch § 16_8).

---

8. $$\begin{cases} \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots \quad x = \operatorname{arc} x^0 \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \end{cases}$$

9. $\cos x + i \sin x = e^{ix}$

$\cos x - i \sin x = e^{-ix}$

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

10. $e^{\varphi} = e^{\varphi + 2k\pi i}$; $e^{2k\pi i} = 1$, $e^{(2k+1)\pi i} = -1$

11. Ist $y = e^x = e^{x + 2k\pi i}$, so ist

$$ly = x + 2k\pi i.$$

$$l(-1) = (2k+1)\pi i;\quad l(-y) = ly + (2k+1)\pi i.$$

Ist $y + iz = re^{\varphi i}$, so ist

$$l(y + iz) = lr + (\varphi + 2k\pi)i.$$

12.
$$\begin{cases} \operatorname{arc\,sin} x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6} \\ \qquad\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots \\ \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad 1 \geqq x \geqq -1 \\ \qquad \text{(Leibnizsche} \\ \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \quad \text{Reihe.)} \end{cases}$$

Zur Berechnung von π kann folgende Formel benützt werden:

$$\begin{cases} \pi = 6\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{12}\left\{1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \ldots\right\} \\ \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} \\ \qquad + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} \\ \frac{\pi}{4} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}. \end{cases}$$

III. Abschnitt.

Gleichungen.

§. 30. Gleichungen ersten Grades.

a) Umformungs- und Versetzungsregeln:

1. Jede Gleichung bleibt richtig, wenn auf jeder Seite dieselbe Operation mit derselben Zahl vorgenommen wird.

2. Ein freier Summand der einen Seite kann auf die andere Seite als Subtrahend gesetzt werden und umgekehrt.

3. Eine Zahl, welche Faktor der gesamten einen Seite ist, kann auf die andere Seite als Divisor derselben gesetzt werden und umgekehrt.

4. Eine Zahl, welche Potenzexponent der gesamten einen Seite ist, kann auf die andere Seite als Wurzelexponent derselben gesetzt werden und umgekehrt.

b) Gleichungen mit einer Unbekannten.

5. Aus $\begin{cases} x + a = b & \text{folgt } x = b - a \\ x - a = b & \text{„} \quad x = b + a. \end{cases}$

$\begin{cases} ax = b & \text{„} \quad x = \frac{b}{a} \\ \frac{x}{a} = b & \text{„} \quad x = ab \end{cases}$

$\begin{cases} x^n = a & \text{„} \quad x = \sqrt[n]{a} \\ \sqrt[n]{x} = a & \text{„} \quad x = a^n. \end{cases}$

6. Aus $\begin{cases} ax = 0 \text{ folgt } x = 0 \\ a(x - b) = 0 \text{ folgt } x - b = 0 \\ (x - a)(x - b) = 0 \text{ folgt } x - a = 0 \text{ u. } x - b = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} ax + bx = cx \text{ folgt } x = 0 \\ a(x - b) + c(x - b) = d(x - b) \text{ folgt } x - b = 0. \end{cases}$

Ist die linke Seite einer auf null gebrachten Gleichung ein Produkt, das x oder Ausdrücke in x als Faktoren enthält, so ist jeder dieser Faktoren gleich null zu setzen.

Kann eine Gleichung mit x oder einem Ausdruck, der x enthält, durchdividiert werden, so ist x, bezw. dieser Ausdruck, gleich null zu setzen.

c) Gleichungen mit zwei und mehr Unbekannten.

7. Aus $\begin{cases} ax + by = c \\ a_1 x + b_1 y = c_1, \text{ folgt} \end{cases}$

$$y = \frac{c - ax}{b},$$

$$y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}, \text{ daher}$$

I. $$\frac{c - ax}{b} = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}$$ (Gleichsetzungsmethode),

II. $$ax + b \cdot \frac{c_1 - a_1 x}{b_1} = c$$ (Einsetzungsmethode),

III. $$\begin{array}{l} a b_1 x + b b_1 y = c b_1 \\ a_1 b x + b b_1 y = c_1 b \\ \hline x(a b_1 - a_1 b) = c b_1 - c_1 b \end{array}$$

$$x = \frac{c b_1 - c_1 b}{a b_1 - a_1 b}$$

(Kombinationsmethode),

IV. $$\begin{array}{ll} 1) & a x + b y = c \quad \mid m \\ 2) & a_1 x + b_1 y = c_1 \quad \mid \\ \hline 3) & (am + a_1)x + (bm + b_1)y = cm + c_1, \end{array}$$

setze $bm + b_1 = 0$, so ist $m = -\frac{b_1}{b}$,

dies in 3) eingesetzt giebt

$$\left(-\frac{ab_1}{b} + a_1\right)x = -\frac{cb_1}{b} + c_1, \text{ oder}$$

$$(-ab_1 + a_1 b)x = -cb_1 + c_1 b$$

$$x = \frac{c b_1 - c_1 b}{a b_1 - a_1 b};$$

ebenso wird y bestimmt.

(Methode der unbest. Koëfficienten von Bézout.)

8. Hat man drei Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$\left|\begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{array}\right|$$

so stellt man durch zweimalige Elimination derselben Unbekannten, z. B. von z, zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten und dann hieraus eine Gleichung mit einer Unbekannten her. — Bei vier Gleichungen mit vier Unbekannten eliminiert man dieselbe Unbekannte dreimal und erhält dadurch drei Gleichungen mit drei Unbekannten u. s. f.

9. Lösung durch Determinanten:

$$\begin{array}{l|l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & A_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & A_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & A_3 \\ \hline \end{array}$$

Durch Multiplikation mit den angeschriebenen Unterdeterminanten und Addition folgt:

$$(a_1 A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)\,x = d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3, \text{ also}$$

$$x = \frac{d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3}{a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3}.$$

Der Nenner ist die Determinante Δ des Systems der linken Seiten. — Für y und z folgt ebenso:

$$y = \frac{d_1B_1 + d_2B_2 + d_3B_3}{\Delta}$$

$$z = \frac{d_1C_1 + d_2C_2 + d_3C_3}{\Delta}.$$

10. Die Bedingung für das gleichzeitige Bestehen von n homogenen Gleichungen, z. B. von

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \text{ ist} \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{array} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

§ 31. Gleichungen zweiten Grades und Exponentialgleichungen.

a) Mit einer Unbekannten.

1. $x^2 = a$

$x = \pm\sqrt{a}$

2. $\underline{\mathbf{x^2 + bx + c = 0}}$ (1. Normalform.)

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = -c + \frac{b^2}{4}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

3. $\underline{\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}}$ (2. Normalform.)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Die Gleichung liefert:

$$\left.\begin{array}{l}\text{2 verschiedene reelle Werte} \\ \text{2 gleiche } \quad\text{"} \quad \text{"} \\ \text{2 verschiedene imag. } \quad \text{"}\end{array}\right\} \text{je nachdem } b^2 - 4ac \gtreqless 0.$$

$b^2 - 4ac$ heisst Diskriminante der Gleichung.

4. $\underline{\mathbf{(x-\alpha)(x-\beta) = 0}}$ (3. Normalform.)

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta. \end{cases}$$

$$\text{Aus } \begin{cases} x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0 \\ x^2 + \quad bx \quad + c = 0 \end{cases} \text{ folgt } \begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c. \end{cases}$$

5. Die Gleichung

$$x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a} \text{ hat die Wurzeln } x_1 = a,\ x_2 = \frac{1}{a}$$

$$x - \frac{1}{x} = a - \frac{1}{a} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad x_1 = a,\ x_2 = -\frac{1}{a}.$$

6. Gleichungen, die durch Einführung einer neuen Unbekannten oder durch Zerlegung auf quadratische zurückgeführt werden können:

1. $ax^4 + bx^2 + c = 0$, setze $x^2 = y$
2. $ax^6 + bx^3 + c = 0$, „ $x^3 = y$
3. $ax^{2m} + bx^m + c = 0$, „ $x^m = y$
4. $ax + b\sqrt{x} + c = 0$, „ $\sqrt{x} = y$
5. $a\sqrt[3]{x^8} + b\sqrt[3]{x^4} + c = 0$, „ $\sqrt[3]{x^4} = y$
6. $au^{2x} + bu^x + c = 0$, „ $u^x = y$ (§ 31c.)
7. $(x^2 + ax)^2 + b(x^2 + ax) + c = 0$, „ $x^2 + ax = y$
8. $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^2 + \frac{ax+b}{cx+d} + e = 0$, „ $\frac{ax+b}{cx+d} = y$.

7. Symmetrische Gleichungen:

1. $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$, $a(x^3+1) + bx(x+1) = 0$, zerfällt in I. $x + 1 = 0$ und II. $a(x^2 - x + 1) + bx = 0$.
2. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, Division mit x^2,
$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0;$$
setze $x + \frac{1}{x} = y$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.
3. $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$,
$$a(x^5 + 1) + bx(x^3 + 1) + cx^2(x + 1) = 0$$

Abspaltung von $x + 1 = 0$, Restgleichung symmetrisch vom vierten Grad.

b) Mit zwei Unbekannten.

Für die Auflösung quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten kann keine allgemeine, einfache Methode angegeben werden, da die Elimination einer der Unbekannten im allgemeinen auf eine Gleichung vierten Grades führt. Es ergiebt sich jedoch in vielen Fällen, in welchen die eine der Gleichungen oder beide nicht alle möglichen Glieder enthalten, die Schlussgleichung als quadratische oder sonst lösbare. In jedem einzelnen Fall ist nach Massgabe der Eigenschaften der vorliegenden Gleichungen zu verfahren. Die wichtigsten Fälle sind:

1. Die eine der beiden Gleichungen ist vom ersten Grad; man drücke eine Unbekannte aus und setze sie in die andere Gleichung ein.

2. Durch Elimination der quadratischen Glieder entsteht eine Gleichung ersten Grades.

3. Es lässt sich eine Vereinfachung durch Absonderung eines Faktors erzielen.

4. Die Einführung einer neuen Unbekannten in die eine Gleichung bewirkt, dass dieselbe nur noch diese Unbekannte enthält, oder es wird das ganze System durch Einführung neuer Unbekannten vereinfacht.

5. Durch Addition und Subtraktion, Multiplikation oder Division der beiden gegebenen Gleichungen, oder auch durch korrespondierende Addition und Subtraktion bei einer derselben, entsteht eine Gleichung, in der für $x + y$, $x - y$, xy oder $\frac{x}{y}$ oder einen sonstigen Ausdruck in x und y eine neue Unbekannte eingeführt werden kann.

6. Die Gleichung ist homogen; man dividiert mit y^2 durch und bestimmt $\frac{x}{y}$.

7. Es kommen ausser dem Absolutglied in jeder Gleichung nur quadratische Glieder vor; man eliminiert die Absolutglieder, so erhält man ein homogene Gleichung. Oder: Man bringt die quadratischen Glieder nach links, dividiert die eine Gleichung durch die andere, dividiert dann Zähler und Nenner durch y^2, setzt $\frac{x}{y} = t$ und bestimmt t.

8. Man kann z. B. aus $x^2 + y^2 = a$

$$2xy = b$$

durch Addition und Subtraktion der zweiten $(x + y)^2$ und $(x - y)^2$ bilden und hieraus $x + y$ und $x - y$ bestimmen.

c) Exponentialgleichungen (logarithmische Gleichungen).

1. Grundaufgabe:

$$a^x = b;$$

$$x \log a = \log b, \quad x = \frac{\log b}{\log a}.$$

2. Besondere Fälle:

1. $a^x = a^r; \quad x = r.$

2. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(\frac{b}{a}\right)^m; \quad x = -m.$

3. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{c}{d}; \quad x = \frac{\log c - \log d}{\log a - \log b}.$

4. $(ab)^{\frac{m+x}{nx}} = a \cdot b^{\frac{n+x}{r+x}}.$
   Logarithmiere, sammle die Glieder mit x nach links, die ohne x nach rechts, und löse nach x auf.

5. $ab^x + c(d + b^{-x}) = e$; setze und bestimme zunächst $y = b^x$.

6. $a^{x+p} + a^{x+q} = b^{x+m} + b^{x+n};$
   $$a^x(a^p + a^q) = b^x(b^m + b^n)$$
   $$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{b^m + b^n}{a^p + a^q};$$ hieraus folgt x.

7. $x^r x^{\log x} = b;$
   $r \log x + \log x \cdot \log x = \log b$, setze und bestimme $y = \log x$ u. s. f.

8. $\log(ax + b) + \log(cx + d) = m;$
   es ist $\log\big((ax + b)(cx + d)\big) = m$, also
   $$(ax + b)(cx + d) = 10^m$$
   woraus x folgt.

9. $a^x b^y = p$
$c^x d^y = q$;
logarithmiere und bestimme aus den erhaltenen Gleichungen $\log x$ und $\log y$.

§ 32. Diophantische Gleichungen ersten Grades.

a) Mit zwei Unbekannten.

1. Euler'sche Methode. (Absonderung der grössten Ganzen.) Beispiel:

$$61x + 7y = 1000$$

$$y = \frac{1000 - 61x}{7} = 143 - 9x + \frac{2x - 1}{7} (= u)$$

$$x = \frac{7u + 1}{2} = 3u + \frac{u + 1}{2} (= v)$$

$$u = 2v - 1, \text{ also}$$

$$x = \frac{14v - 7 + 1}{2} = 7v - 3$$

$$y = \frac{1000 - 61(7v - 3)}{7} = 169 - 61v.$$

v	x	y
0	−3	169
1	4	108
2	11	47
3	18	−14

$\begin{cases} 4 \\ 108 \end{cases}$ $\begin{cases} 11 \\ 47 \end{cases}$ sind also die brauchbaren Werte für die Unbekannten.

2. Kettenbruchmethode von Lagrange:
Ist 1. $ax + by = c$ gegeben, so setze man
2. $a_1 x + b_1 y = t$. dann folgt:

3. $$x = \frac{b_1 c - bt}{ab_1 - a_1 b},$$

$$y = \frac{at - a_1 c}{ab_1 - a_1 b},$$

x und y sind dann ganze Zahlen, wenn $a b_1 - a_1 b = \pm 1$. Dies ist der Fall, wenn $\frac{a_1}{b_1}$ vorletzter Näherungswert des in einen Kettenbruch verwandelten Bruches $\frac{a}{b}$ ist (s. § 17₄).

Beispiel: 1. $61x + 7y = 1000$

Näherungswerte des in einen Kettenbruch verwandelten Bruches $\frac{7}{61}$ sind: $\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{3}{26}, \frac{7}{61}$, also

2. $26x + 3y = t$

3. $x = 3000 - 7t = 7(429 - t) - 3$
$= \mathbf{7v - 3}$

4. $y = \frac{t - 26x}{3} = \frac{429 - v - 182v + 78}{3}$
$= \mathbf{169 - 61v}$.

v	0	1	2	3
x	−3	4	11	18
y	169	108	47	−14

Res.: $\begin{cases} 4 \\ 108 \end{cases}, \begin{cases} 11 \\ 47 \end{cases}$.

b) Mit drei Unbekannten.

3. Man eliminiere aus den zwei gegebenen Gleichungen eine der drei Unbekannten, z. B. z, dann löse man die erhaltene Gleichung nach a) auf und berechne z vermittelst der erhaltenen Werte von x und y aus einer der gegebenen Gleichungen.

§ 33. Allgemeine Sätze über höhere Gleichungen.

1. Hat $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ die Wurzel $x = \alpha$, so ist $f(x)$ durch $x - \alpha$ ohne Rest teilbar.

2. Eine Gleichung nten Grades hat n, aber auch nur n Wurzeln.

3. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$, so ist

$$\mathbf{f(x)=a_0\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)} \text{ und}$$

4. Symmmetrische Funktionen:

$$\frac{a_1}{a_0} = -\Sigma K_1(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n);$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \Sigma K_2(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n;$$

$$\frac{a_3}{a_0} = -\Sigma K_3(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n.$$

. . . .

$$\frac{a_n}{a_0} = (-1)^n \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \ldots \alpha_n.$$

5. Eine Gleichung hat höchstens soviel reelle positive Wurzeln als Zeichenwechsel und höchstens soviel reelle negative Wurzeln als Zeichenfolgen (die fehlenden Glieder sind mit ± 0 zu ergänzen).

6. Ist $p + qi$ eine Wurzel einer Gleichung mit reellen Koeffizienten, so ist auch $p - qi$ eine Wurzel. Die Gleichung hat, wenn sie imaginäre Wurzeln hat, stets eine gerade Anzahl derselben. Eine Gleichung von ungeradem Grad hat daher zum wenigsten eine reelle Wurzel.

7. Wird $f(x)$ für $x=p$ negativ und für $x=q$ positiv, so liegt mindestens eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ zwischen p und q.

8. Sind die Koeffizienten der r niedersten Potenzen von x (x^0 eingeschlossen) gleich null, so hat die Glei-

chung r mal die Wurzel null; sind die der r höchsten Potenzen 0, so hat sie r mal die Wurzel ∞.

9. Ist α eine Wurzel der Gleichung 1., so ergiebt sich aus derselben durch Division mit $x - \alpha$ die Gleichung $n-1$ ten Grades

$$\frac{f(x)}{x-\alpha} = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1} = 0,$$

dann ist $\qquad b_r = b_{r-1} \cdot \alpha + a_r$.

Beispiel $3x^5 - 7x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 7x - 2 = 0$ soll durch $x - 2$ dividiert werden.

	3	−7	+2	+4	−7	−2
2	3	−1	0	4	+1	0

Res.: $3x^4 - x^3 + 4x + 1 = 0$.

Durch diese Division wird festgestellt, ob $x = 2 (= \alpha)$ eine Wurzel der ursprünglichen Gleichung ist.

Um die ganzen rationalen Wurzeln einer Gleichung aufzufinden, zerlege man a_n in Faktoren $p_1, p_2 \ldots$ und versuche, ob $x - p_1$, $x - p_2 \ldots$ ohne Rest in die Gleichung aufgeht. s. auch § $37_{a,\,1}$.

10. Wurzelverkleinerung. Soll die Gleichung

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

in die Gleichung

$$\varphi(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

umgewandelt werden, so dass die Wurzeln der letzteren Gleichung um k kleiner sind als die der gegebenen, so muss $f(x) = \varphi(x - k)$, also

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = p_0 (x-k)^n + p_1 (x-k)^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(x-k) + p_n$$

sein und es sind daher $p_n, p_{n-1}, \ldots p_0$ die Reste, die sich ergeben, wenn man $f(x)$ fortlaufend mit $x - k$ dividiert.

Beispiel: $x^4 - 4x^3 - 39x^2 + 46x + 80 = 0$

$$\begin{array}{llllll} 4) & 1 & 0 & -39 & -110 & -\mathbf{360} = \mathbf{p_n} \\ 4) & 1 & 4 & -23 & -\mathbf{202} = \mathbf{p_{n-1}} & \\ 4) & 1 & 8 & +\mathbf{9} = \mathbf{p_{n-2}} & & \\ 4) & 1 & \mathbf{12} = \mathbf{p_1} & & & \\ 4) & \mathbf{1} = \mathbf{p_0} & & & & \end{array}$$

die gesuchte Gleichung ist:

$$x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 202x - 360 = 0.$$

11. Wurzelreduktion (= Transformation). Soll die Gleichung $f(x) = 0$ so umgeformt werden, dass das zweite Glied der neuen Gleichung 0 ist, so ist, da $p_1 = a_1 + n k a_0 = 0$,

$$k = -\frac{a_1}{n a_0}.$$

Beispiel: $x^3 - 18x^2 + 105x - 196 = 0$; $k = -\frac{-18}{3} = +6$;

$$\begin{array}{lllll} 6) & 1 & -12 & +33 & +2 \\ 6) & 1 & -6 & -3 & \\ 6) & 1 & 0 & & \end{array}$$

$y = x - 6$;

Res.: $y^3 - 3y + 2 = 0$.

§ 34. Binomische Gleichungen.

1. $x^n = +1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$;

$$x = \sqrt[n]{+1} = (+1)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}.$$

wobei k alle ganzen Werte von 0 bis n erhält.

2. $x^n = -1 = \cos(2k+1)\pi + i \sin(2k+1)\pi$;

$$x = \sqrt[n]{-1} = \cos\frac{2k+1}{n}\pi + i \sin\frac{2k+1}{n}\pi.$$

3. Beispiele.

1. $\mathbf{x^3 = 1}$;

$$\begin{aligned}&\text{mit } k=0\ldots\ldots\ldots && x=1,\\ &\text{mit } k=\begin{cases}1\\2\end{cases}\ldots\ldots && x=\cos 120^0 \pm i\sin 120^0=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\\ &&& =\begin{cases}\alpha\\ \beta.\end{cases}\end{aligned}$$

2. $\mathbf{x^3=-1;}$

$$\begin{aligned}&\text{mit } k=\begin{cases}0\\2\end{cases}\ldots\ldots && x=\cos 60^0 \pm i\sin 60^0=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}=\begin{cases}-\beta\\ -\alpha,\end{cases}\\ &\text{mit } k=1\ldots\ldots\ldots && x=-1.\end{aligned}$$

3. $\mathbf{x^4=1;}$

$$\begin{aligned}&\text{mit } k=0\ldots\ldots\ldots && x=1,\\ &\text{mit } k=\begin{cases}1\\3\end{cases}\ldots\ldots && x=\cos 90 \pm i\sin 90=\pm i,\\ &\text{mit } k=2\ldots\ldots\ldots && x=-1.\end{aligned}$$

4. $\mathbf{x^4=-1;}$

$$\begin{aligned}&\text{mit } k=\begin{cases}0\\3\end{cases}\ldots\ldots && x=\cos 45^0 \pm i\sin 45^0.\\ &\text{mit } k=\begin{cases}1\\2\end{cases}\ldots\ldots && x=\cos 135^0 \pm i\sin 135^0.\end{aligned}$$

5. $\mathbf{x^5=1;}$

$$\begin{aligned}&\text{mit } k=0\ldots\ldots && x=1,\\ &\text{mit } k=\begin{cases}1\\4\end{cases}\ldots\ldots && x=\cos 72^0 \pm i\sin 72^0,\\ &\text{mit } k=\begin{cases}2\\3\end{cases}\ldots\ldots && x=\cos 144^0 \pm i\sin 144^0.\end{aligned}$$

6. $\mathbf{x^5=-1;}$

$$\begin{aligned}&\text{mit } k=\begin{cases}0\\4\end{cases}\ldots\ldots && x=\cos 36^0 \pm i\sin 36^0,\\ &\text{mit } k=\begin{cases}1\\3\end{cases}\ldots\ldots && x=\cos 108^0 \pm i\sin 108^0,\\ &\text{mit } k=2\ldots\ldots\ldots && x=-1.\end{aligned}$$

4. $x^n = a$ | $x^n = -a$

$$x = \left(\sqrt[n]{a}\right) \cdot \sqrt[n]{+1} \qquad\qquad x = \left(\sqrt[n]{a}\right) \cdot \sqrt[n]{-1}$$

wobei $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ den absoluten, reellen Wert von $\sqrt[n]{a}$ bedeuted, welchen man durch direkte Wurzelausziehung oder logarithmische Berechnung erhält, während $\sqrt[n]{+1}$ und $\sqrt[n]{-1}$ jeden der durch 1. und 2. bestimmten Werte darstellen.

§ 35. Kubische Gleichungen.

1. $x^3 - a = 0$ | $x^3 + a = 0$

$$x = \sqrt[3]{a} = \begin{cases} \left(\sqrt[3]{a}\right) \\ \left(\sqrt[3]{a}\right) \cdot \alpha \\ \left(\sqrt[3]{a}\right) \cdot \beta \end{cases} \qquad x = \sqrt[3]{-a} = \begin{cases} -\left(\sqrt[3]{a}\right) \\ -\left(\sqrt[3]{a}\right) \cdot \alpha \\ -\left(\sqrt[3]{a}\right) \cdot \beta \end{cases}$$

s. § 34, $3_{1,2}$.

2. $$x^3 + a x^2 + b x + c = 0$$

Transformiere die Gleichung (durch Wurzelverkleinerung um $\frac{a}{3}$ oder Subtsitution von $y = x - \frac{a}{3}$, s. $§ 33_{10}$) auf die Form

$$\mathbf{y^3 + 3py + 2q = 0}$$

und setze $y = u + v$ und $u^3 + v^3 + 2q = 0$,

dann ist $$\begin{cases} u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} \\ v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = u + v \\ y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\,(u - v) \\ y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\,(u - v) \end{cases}$$ (Cardan'schen Formeln)

Die Cardanschen Formeln führen zu einer Lösung nur so lange $q^2+p^3>0$; sie liefern dann 1 reelle und 2 imaginäre Wurzeln.

3. Fall der 3 reellen Wurzeln (casus irreducibilis). Ist $q^2+p^3<0$, so hat die Gleichung 3 reelle Wurzeln, aber diese können nicht mit den genannten Formeln bestimmt werden; dann

$$\left\{\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{-q}{\sqrt{-p^3}} \\ y_1 &= 2\sqrt{-p}\,.\cos\frac{\varphi}{3} \\ y_2 &= -2\sqrt{-p}\,.\cos\left(\frac{\varphi}{3}+60^0\right) \\ y_3 &= -2\sqrt{-p}\,.\cos\left(\frac{\varphi}{3}-60^0\right). \end{aligned}\right.$$

4. Trigonometrische Auflösung für Fall 2: $q^2+p^3>0$.

1. $p>0$

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{\sqrt{p^3}}{q}\,;\ \sqrt[3]{\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}}=\operatorname{tg}\psi \\ y_1 &= \mp 2\sqrt{p}\,.\operatorname{ctg}2\psi \\ y_2 &= \pm\sqrt{p}\left(\operatorname{ctg}2\psi+\frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi}\right) \\ y_3 &= \pm\sqrt{p}\left(\operatorname{ctg}2\psi-\frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi}\right); \end{aligned}\right.$$

hiebei sind die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen, je nachdem $q \gtrless 0$.

2. $p < 0$

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{+q}; \quad \operatorname{tg}\sqrt[3]{\dfrac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg}\psi \\ y_1 = \mp 2\sqrt{-p}\cdot\dfrac{1}{\sin 2\psi} \\ y_2 = \pm\sqrt{-p}\left(\dfrac{1}{\sin 2\psi} + i\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2\psi\right) \\ y_3 = \pm\sqrt{-p}\left(\dfrac{1}{\sin 2\psi} - i\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2\psi\right). \end{cases}$$

Zeichen wie oben bei 1. zu nehmen.

§ 36. Biquadratische Gleichungen.

1. Besondere Fälle s. § 31, $6_1, 7_2$.

2. Methode der Zerlegung. Man reduziere die gegebene Gleichung auf die Form:

$$x^4 + a x^2 + b x + c = 0 \text{ und setze}$$

$$x^4 + a x^2 + b x + c = (x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1);$$

hieraus durch Koeffizientenvergleichung

$$1. \begin{cases} \alpha = -\alpha_1 \\ \beta + \beta_1 - \alpha^2 = a \\ \alpha(\beta_1 - \beta) = b \\ \beta\beta_1 = c \end{cases}$$

Durch Elimination von β und β_1 ergiebt sich:

2. $\alpha^6 + 2a\alpha^4 + (a^2 - 4c)\alpha^2 - b^2 = 0$
3. Transformation und Lösung dieser (nach α^2) kubischen Resolvente. (Ein Wert von α genügt; die andern liefern die x nur in anderer Reihenfolge.)
4. Berechnung von β und β_1 aus 1.
5. Lösung der Gleichungen: $\begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta = 0 \\ x^2 - \alpha x + \beta_1 = 0 \end{cases}$

3. Euler'sche Methode.

1. Transformierung der Gleichung auf die Form

$$x^4 + a x^2 + b x + c = 0$$

2. Bildung der Resolvente

$$y^3 + \frac{a}{2} y^2 + \frac{a^2 - 4c}{16} y - \frac{b^2}{64} = 0$$

Sind die Wurzeln dieser Gleichung y_1, y_2, y_3, dann ist

$$\begin{cases} x_1 = \pm(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}) \\ x_2 = \pm(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}) \\ x_3 = \pm(-\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}) \\ x_4 = \pm(-\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}), \end{cases}$$

wobei die Vorzeichen so zu wählen sind, dass

$$\sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2} \cdot \sqrt{y_3} = -\frac{b}{8}$$

§ 37a. Höhere Numerische Gleichungen. — Näherungsmethoden.

1. Rationale Wurzeln, Zerlegung des Absolutgliedes. — Man bestimmt alle Faktoren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ des Absolutgliedes und stellt durch Einsetzung derselben in die gegebene Gleichung fest, ob sie derselben genügen.

Ist die Zahl der Faktoren eine sehr grosse, so stellt man mit der Substitution $x = y + 1$ eine neue Gleichung her und bestimmt wiederum die Faktoren des Absolutgliedes. Es können dann nur diejenigen Faktoren des Absolutgliedes der gegebenen Gleichung Wurzeln derselben sein, welche um 1 grösser sind als die entsprechenden Faktoren der zweiten Gleichung.

2. Newtons Methode. Hat man durch Versuche (oder durch Aufzeichnung der Kurve) gefunden, dass α annähernd eine Wurzel der Gleichung

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0$$

ist, so ist an α noch eine Korrektion anzubringen, um den wirklichen Wert zu erhalten. Die erste Korrektion p ergiebt sich aus (Taylors Satz s. § 95)

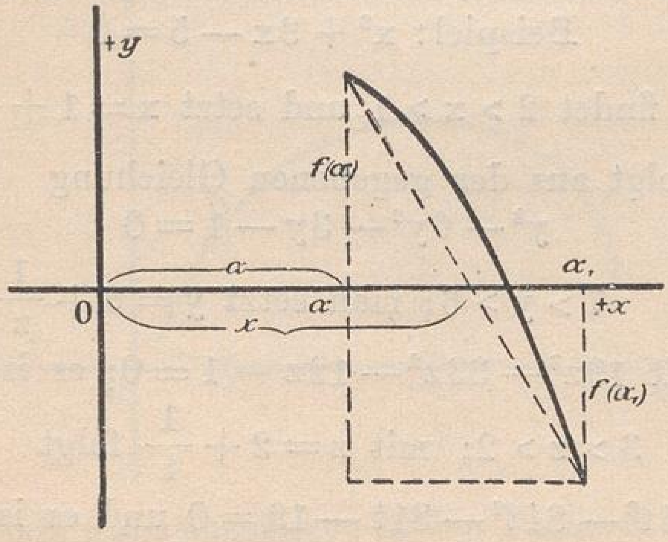
$$p = \frac{-(a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n)}{n a_0 \alpha^{n-1} + (n-1) a_1 \alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-1}} = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Setzt man nun $\alpha + p$ an Stelle von α, so erhält hiemit aus der angegebenen Beziehung eine weitere Korrektion p_1 u. s. f.

3. Regula falsi (indische Methode). Hat die Gleichung $f(x) = 0$ eine Wurzel zwischen α und α_1 ($f(\alpha)$ und $f(\alpha_1)$ haben also entgegengesetzte Vorzeichen), so erhält man einen angenäherten Wert für die Wurzel, wenn man an Stelle des Schnittpunktes der Kurve mit der X achse, den der Sehne setzt, welche die zu den Abscissen α und α_1 gehörigen Kurvenpunkte verbindet; man hat dann:

$$\frac{x - \alpha}{f(\alpha)} = \frac{x - \alpha_1}{f(\alpha_1)}, \text{ somit}$$

$$x = \alpha + \frac{(\alpha_1 - \alpha) f(\alpha)}{f(\alpha) - f(\alpha_1)}.$$



Mit dem neuen Wert und einem benachbarten, kann das Verfahren wiederholt werden u. s. f. — Dieses Verfahren ist insbesondere bei transcendenten Gleichungen anwendbar. Beispiel:

$$x^x = 100, \text{ also}$$
$$x \log x = 2 \text{ oder } x \log x - 2 = 0.$$

Ausrechnung:

x	$f(x) = x \log x - 2$
1	-2
2	$-1,4$
3	$-0,5687$
4	$+0,4084$

$$x = 3 + \frac{1 \,.\, 0,57}{0,98} = 3,58$$

3,58	$+0,0171$
3,60	$-0,0027$

$$x = 3,58 + \frac{0,02 \,.\, 0,0171}{0,0198}$$
$$= 3,58 + 0,01727 = 3,59727 \text{ u. s. f.}$$

(die richtige Wurzel liegt zwischen 3,59728 und 3,59729).

4) Kettenbruchmethode von Lagrange.

Beispiel: $x^3 + 3x - 5 = 0$

Man findet $2 > x > 1$ und setzt $x = 1 + \frac{1}{y}$;

hiermit folgt aus der gegebenen Gleichung

$$y^3 - 6y^2 - 3y - 1 = 0$$

nun ist $7 > y > 6$; man setzt $y = 6 + \frac{1}{z}$

und erhält $19z^3 - 33z^2 - 12z - 1 = 0$; es ist

$$3 > z > 2; \text{ mit } z = 2 + \frac{1}{t} \text{ folgt}$$

$$5t^3 - 84t^2 - 81t - 19 = 0 \text{ und es ist}$$
$$18 > t > 17 \text{ u. s. f.}$$

Es ist nun: $x = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{17 + \ldots}}} = 1{,}15416$

oder $x = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{18}}} = 1{,}15418$.

§ 37b. Grösste und kleinste Werte.

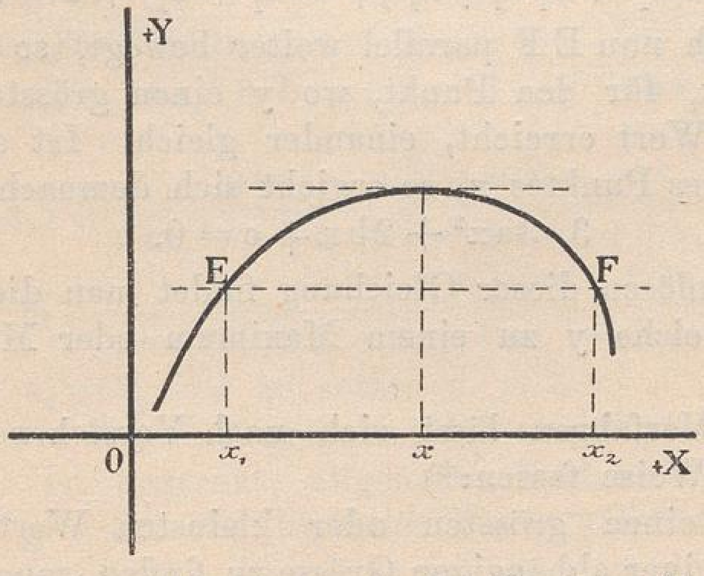
(Elementare Behandlung.)

Ist y eine Funktion von x, also eine von x abhängige Grösse, und z. B.

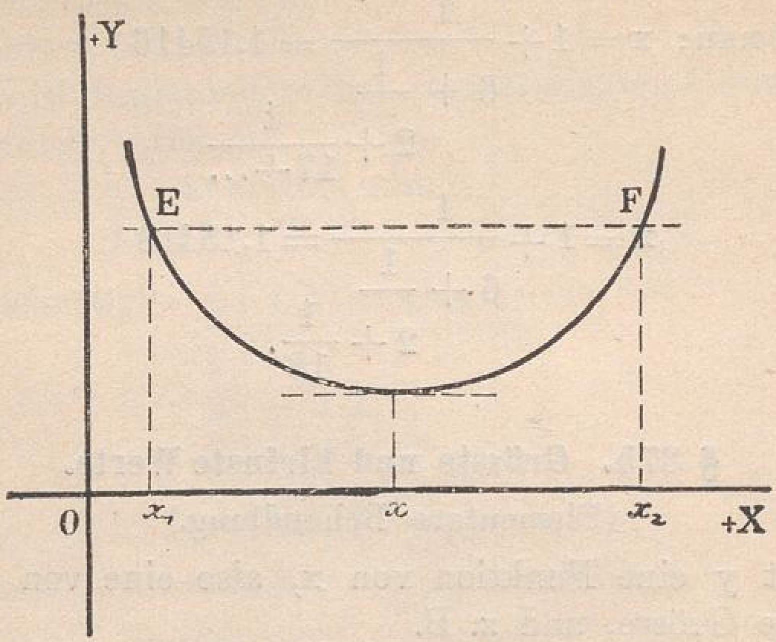
$$1.\quad y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

so können hiebei die verschiedenen Werte von x als Abscissen, die von y als Ordinaten einer Kurve betrachtet werden.

Zieht man eine Parallele E F zur X axe, welche die



betreffende Funktionskurve in den Punkten E, F, deren Abscissen x_1 und x_2 sind, schneidet, so hat y in diesen



Punkten E und F die gleichen Werte, es ist also für obiges Beispiel 1.
$ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d$, woraus $a(x_1^3 - x_2^3) + b(x_1^2 - x_2^2) + c(x_1 - x_2) = 0$, folglich nach Division mit $x_1 - x_2$.

$$2.\ a(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + b(x_1 + x_2) + c = 0.$$

Wenn sich nun E F parallel weiter bewegt, so werden x_1 und x_2 für den Punkt, wo y einen grössten oder kleinsten Wert erreicht, einander gleich. Ist die Abscisse dieses Punktes x, so ergiebt sich demnach aus 2.

$$3.\ 3ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung findet man die Werte von x, welche y zu einem Maximum oder Minimum machen.

Das Verfahren lässt sich nach Vorstehendem in folgender Weise fassen:*)

Um einen grössten oder kleinsten Wert (oder mehrere) einer abhängigen Grösse zu finden, muss man:

*) Vergl. hiezu: Martus, Maxima und Minima, Berlin 1861.

1. Die Funktion in einer unabhängigen veränderlichen Grösse x ausdrücken;

2. in diesen Ausdruck x_1 und dann x_2 einsetzen und die sich ergebenden Ausdrücke einander gleich setzen;

3. die gleich hohen Glieder zusammenfassen, so dass sich mit dem Faktor $x_1 - x_2$ durchdividieren lässt;

4. nachdem mit $x_1 - x_2$ durchdividiert ist, hat man in der hiedurch erhaltenen Gleichung $x_1 = x_2 = x$ zu setzen und die Gleichung aufzulösen. Für die gefundenen Werte von x erreicht y ein Maximum oder Minimum.

5. Ob ein grösster oder kleinster Wert vorliegt, ergiebt sich aus der Natur der Aufgabe oder durch Berechnung der Werte von y für solche Werte von x, die dem gefundenen benachbart sind.

Bemerkungen: 1. Bei Funktionen, in denen eine Quadratwurzel vorkommt, muss vor dem Dividieren mit $x_1 - x_2$ in der Regel noch umgeformt werden.

Beispiel:

$$mx_1 + n + \sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} = mx_2 + n + \sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c},$$

$$m(x_1 - x_2) + \sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} - \sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c} = 0,$$

woraus

$$m(x_1 - x_2) + \frac{a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2)}{\sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} + \sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c}} = 0,$$

folglich $m + \dfrac{a(x_1 + x_2) + b}{\sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} + \sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c}} = 0.$

Nun ist $x_1 = x_2 = x$ zu setzen u. s. f.

2) Das Anwendungsgebiet der obigen, elementaren Methode ist begrenzt; allgemeine Verfahren für Auffindung grösster und kleinster Werte giebt die höhere Analysis (s. § 97).