Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

I. Abschnitt. Grundoperationen und Kombinatorik.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

Arithmetik, Algebra und niedere Analysis.

I. Abschnitt.

Grundoperationen und Kombinatorik.

§ 1. Benennungen.

Summe: $a + b$; a und b Summanden.

Differenz: $a - b$; a Minuend, b Subtrahend.

Produkt: $a \,.\, b$; a und b Faktoren (a Multiplikator, b Multiplikand).

Quotient: $a : b$; a Dividend, b Divisor.

§ 2. Addition.

1. $a + b = b + a$.

2. $a + (b + c) = a + b + c$
$= a + c + b = b + a + c = b + c + a$
$= c + a + b = c + b + a$

2.′ $a + (b + c + d + \ldots) = a + b + c + d + \ldots$
$= b + a + c + d + \ldots = \ldots$

3. $a + 0 = 0$; $0 + a = a$; $0 + 0 = 0$.

§ 3. Subtraktion.

1. Erklärung: $(a - b) + b = a$.

2. $a + b - b = a$.

3. $a - a = 0$; $a - 0 = a$; $0 - 0 = 0$.

§ 4. Negative Zahlen.

1\. Erklärung: $\begin{cases} 7 - 5 = 2 \\ 5 - 5 = 0 \\ 5 - 7 = -2 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{array}{r} (a + b) - a = b \\ a - a = 0 \\ a - (a + b) = - b. \end{array}$

2\. $\begin{cases} +a + (+b) = +a + b \\ -a + (+b) = -a + b \end{cases}$

3\. $\begin{cases} +a + (-b) = +a - b \\ -a + (-b) = -a - b \end{cases}$

4\. $\begin{cases} +a - (+b) = +a - b \\ -a - (+b) = -a - b \end{cases}$

5\. $\begin{cases} +a - (-b) = +a + b \\ -a - (-b) = -a + b \end{cases}$

Zusammenstellung:

$\begin{cases} +(+b) = +b \\ -(-b) = +b \end{cases}$

$\begin{cases} +(-b) = -b \\ -(+b) = -b \end{cases}$

§ 5. Verbindung von Addition und Subtraktion.

Gesetze erster Stufe:

1\. $\begin{cases} a + (b + c) = a + b + c \\ a + (b - c) = a + b - c \\ a + (b - c - d) = a + b - c - d \\ a + (-b + c - d) = a - b + c - d. \end{cases}$

2\. $\begin{cases} a - (b + c) = a - b - c \\ a - (b - c) = a - b + c \\ a - (-b + c - d) = a + b - c + d. \end{cases}$

3\. $a - b + c - d = a + c - b - d = a + c - d - b$
$= - b + a + c - d = \ldots\ldots$

Klammerregeln:

1\. Regel: Eine Klammer, vor der ein + Zeichen steht, kann ohne weiteres weggelassen werden; jedes in der Klammer befindliche Glied behält sein Zeichen.

2\. Regel: Eine Klammer, vor der ein — Zeichen steht, kann weggelassen werden, wenn alle in der Klammer befindlichen freien + in — Zeichen und umgekehrt verwandelt werden.

3. Regel: Kommen in einem Ausdruck nur + und — Zeichen vor, so kann eine einem + Zeichen folgende Reihe von Gliedern ohne weiteres von einer Klammer umschlossen werden; die einem — Zeichen folgenden Glieder dürfen nur dann von einer Klammer umschlossen werden, wenn man die von der Klammer zu umschliessenden freien + in — Zeichen und umgekehrt verwandelt.

§ 6. Multiplikation.

Erklärung: $\begin{cases} 3 \,.\, a = a + a + a \\ m \,.\, a = a + a + \ldots + a \text{ (m Summanden).} \end{cases}$

1. $1 \,.\, a = a;\ 0 \,.\, a = 0;\ 0 \,.\, 0 = 0.$
2. $a \,.\, b = b \,.\, a.$
3. $(a + b) \,.\, c = ac + bc;\ (a - b) \,.\, c = ac - bc.$
4. $\begin{cases} (a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd \\ (a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd \\ (a - b)(c + d) = ac - bc + ad - bd \\ (a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd. \end{cases}$

Zusammenstellung.

5. $\begin{cases} (+ b)(+ d) = + bd, & \text{kurz: } + \,.\, + = + \\ (+ b)(- d) = - bd, & \text{„ } + \,.\, - = - \\ (- b)(+ d) = - bd, & \text{„ } - \,.\, + = - \\ (- b)(- d) = + bd, & \text{„ } - \,.\, - = + \end{cases}$
6. $(-a)(-b)(-c) = -abc;\ (-a)(-b)(-c)(-d) = +abcd.$

Bei ungerader Zahl der negativen Faktoren ist das Produkt negativ, bei gerader Anzahl positiv.

7. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$
8. $(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2.$
9. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$
10. $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4.$

11. Binomialtafel:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & 1 \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & 3 \arrow[r] \arrow[d] & 3 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{tikzcd}$$

u. s. f.

(Binomischer Lehrsatz s. § 28.)

$$12. \begin{cases} a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - a b + b^2) \\ a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^5) \end{cases}$$

u. s. f.

$$13. \begin{cases} a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + a b + b^2) \\ a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + a b^3 + b^4) \end{cases}$$

u. s. f.

$$14. \begin{cases} a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a + b)(a - b)(a^2 + b^2) \\ \qquad = (a + b)(a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3) \\ \qquad = (a - b)(a^3 + a^2 b + a b^2 + b^3) \end{cases}$$

u. s. f.

§ 7. Division.

$$\text{Erklärung: } \begin{cases} (a : b) \,.\, b = a \\ a \,.\, b : b = a. \end{cases}$$

$$1. \begin{cases} (+ a) : (+ b) = + (a : b), & \text{kurz: } + : + = + \\ (- a) : (- b) = + (a : b), & \quad " \quad - : - = + \\ (+ a) : (- b) = - (a : b), & \quad " \quad + : - = - \\ (- a) : (+ b) = - (a : b), & \quad " \quad - : + = -. \end{cases}$$

$$2.\begin{cases} a : a = 1, \quad a : 1 = a, \quad 0 : a = 0; \\ a : 0 = \infty \text{ (wobei 0 etwas unendlich Kleines);} \\ 0 : 0 = \text{unbestimmte Zahl.} \end{cases}$$

$$3.\begin{cases} (a + b) : m = (a : m) + (b : m) \\ (a - b) : m = (a : m) - (b : m) \\ (a - b + c - d) : m = (a : m) - (b : m) + (c : m) - (d : m). \end{cases}$$

§ 8. Verbindung von Multiplikation und Division.

Gesetze zweiter Stufe:

$$1.\begin{cases} a \,.\, (b \,.\, c) = a \,.\, b \,.\, c \\ a \,.\, (b : c) = a \,.\, b : c \\ a \,.\, (b \,.\, c : d \,.\, e) = a \,.\, b \,.\, c : d \,.\, e. \end{cases}$$

$$2.\begin{cases} a : (b \,.\, c) = a : b : c \\ a : (b : c) = a : b \,.\, c \\ a : (b \,.\, c : d \,.\, e) = a : b : c \,.\, d : e. \end{cases}$$

3. $a : b \,.\, c : d = a \,.\, c : b : d = c \,.\, a : b : d = c : b \,.\, a : d = \text{etc.}$

Klammerregeln:

1. Regel: Kommen in einer Klammer nur freie Rechenzeichen zweiter Stufe vor und steht vor derselben 1. ein Multiplikations- oder 2. ein Divisionszeichen, so darf die Klammer im ersten Fall ohne weiteres, im zweiten nur dann weggelassen werden, wenn man sämtliche freien Multiplikations- in Divisionszeichen und umgekehrt verwandelt.

2. Regel: Kommen in einem Ausdruck nur Rechenzeichen zweiter Stufe vor, so kann eine beliebige einem .Zeichen folgende Reihe von Gliedern ohne weiteres von einer Klammer umschlossen werden; die einem :Zeichen folgenden Glieder dürfen nur dann von einer Klammer umschlossen werden, wenn man die von der Klammer zu umschliessenden freien . in :Zeichen und umgekehrt verwandelt.

§ 9. Klammerlose Ausdrücke.

1. Kommen in einem Ausdruck nur Rechenzeichen gleicher Stufe vor (nur + und — oder nur . und :), so darf die Reihenfolge der Glieder beliebig geändert werden, doch darf kein Divisor erstes Glied werden (s. § 5_3 und § 8_3).

2. Der Gang der Rechnung ist von links nach rechts, die höhere Rechenweise ist vor der niederen auszuführen.

§ 10. Brüche.

Erklärung: $\begin{cases} \frac{a}{b} \cdot b = a \\ \frac{ab}{b} = a \end{cases}$

1. $\begin{cases} \frac{a}{a} = 1, \quad \frac{a}{1} = a, \quad \frac{0}{a} = 0 \\ \frac{a}{0} = \infty \text{ (s. § } 7,_2), \quad \frac{0}{0} = \text{unbestimmte Zahl.} \end{cases}$

2. $\frac{a}{x} \pm \frac{b}{x} = \frac{a \pm b}{x}$

3. $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}, \quad \frac{b}{c} \cdot a = \frac{ba}{c}$

4. $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$

5. $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$

6. $\frac{an}{bn} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a:n}{b:n} = \frac{a}{b}$

7. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

$$8. \begin{cases} +\frac{+a}{+b}=+\frac{a}{b}, \quad +\frac{-a}{-b}=+\frac{a}{b} \\ +\frac{+a}{-b}=+\frac{-a}{+b}=-\frac{a}{b}, \quad -\frac{+a}{-b}=-\frac{-a}{+b}=+\frac{a}{b} \\ \frac{a-b}{c-d}=\frac{b-a}{d-c}=-\frac{b-a}{c-d}=-\frac{a-b}{d-c} \end{cases}$$

§ 11. Proportionen.

Wenn $a : b = c : d$, dann ist $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ und

1. $a : c = b : d$,	$c : a = d : b$,
$b : a = d : c$,	$c : d = a : b$,
$b : d = a : c$,	$d : b = c : a$,
	$d : c = b : a$, d. h.:

In einer Proportion kann man die inneren Glieder unter sich, die äussern Glieder unter sich vertauschen und es dürfen die inneren Glieder zu äusseren, und die äusseren zu inneren gemacht werden.

2. $ad = bc$, d. h.:

Das Produkt der äusseren Glieder ist gleich dem Produkt der inneren.

Umgekehrt: Sind zwei Produkte aus je zwei Faktoren einander gleich, so kann aus denselben eine Proportion gebildet werden. Die Faktoren des einen Produkts werden die äusseren, die des andern die innern Glieder der Proportion.

3. $am : bm = c : d$,	$(a : m) : (b : m) = c : d$,
$am : b = cm : d$,	$(a : m) : b = (c : m) : d$, d. h.:

In einer Proportion darf ein inneres und ein äusseres Glied zugleich mit derselben Zahl multipliziert oder dividiert werden.

4. $a^n : b^n = c^n : d^n$,	$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.

5. Korrespondierende Addition:

$$a:(a+b)=c:(c+d) \mid b:(a+b)=d:(c+d).$$

Korrespondierende Subtraktion:

$$a:(a-b)=c:(c-d) \mid b:(a-b)=d:(c-d).$$

Korrespondierende Addition und Subtraktion:

$$(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d).$$

Das erste oder zweite Glied einer Proportion verhält sich zur Summe oder Differenz des ersten und zweiten, wie das dritte oder vierte Glied zur Summe oder Differenz des dritten und vierten.

Die Summe des ersten und zweiten Glieds verhält sich zur Differenz derselben wie die Summe des dritten und vierten Glieds zur Differenz derselben.

6. Wenn $a:a_1=b:b_1=c:c_1=\ldots=w:1$, dann ist

$$(a+b+c+\ldots):(a_1+b_1+c_1+\ldots)=a:a_1=\ldots=w:1,$$

und

$$(am+bn+cp+\ldots):(a_1m+b_1n+c_1p+\ldots)=a:a_1 \\ =\ldots w:1.$$

7. Wenn
$$\begin{array}{l} a:b=c:d \\ \underline{a_1:b_1=c_1:d_1,\text{ dann ist}} \\ \left\{\begin{array}{l}(aa_1):(bb_1)=(cc_1):(dd_1)\text{ und} \\ (a:a_1):(b:b_1)=(c:c_1):(d:d_1).\end{array}\right.\end{array}$$

8. Wenn
$$\begin{array}{c} a:b=c:d\text{ und} \\ \underline{a:b=c:x,\text{ dann ist}} \\ x=d.\end{array}$$

9. Stetige Proportion: $a:x=x:b$.

10. Harmonische Proportion:

$$(a-b):(c-d)=a:d;$$

stetige harmonische Proportion:

$$(a-x):(x-b)=a:b.$$

11. a) Arithmetisches Mittel aus a und b:

$$x = \frac{a+b}{2}.$$

b) Geometrisches Mittel aus a und b:

$$x = \sqrt{a\,b}.$$

c) Harmonisches Mittel aus a und b:

$$x = \frac{2\,a\,b}{a+b}, \text{ also } \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

Bei drei Grössen a, b, c ist

$$\text{a) } x = \frac{a+b+c}{3}, \quad \text{b) } x = \sqrt[3]{a\,b\,c}, \quad \text{c) } \frac{1}{x} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

§ 12. Potenzen mit ganzen Exponenten.

I. Positive, ganze Exponenten.

$$\begin{cases} a^3 = a\,.\,a\,.\,a \\ a^m = a\,.\,a\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,a \text{ (m Faktoren)}, \end{cases}$$

a heisst Basis, m Exponent, a^m Potenz.

1. $a^1 = a,\ 0^n = 0,\ 1^n = 1,\ a^0 = 1;\ a^\infty = \begin{cases} 0 \\ 1, \text{ wenn } a \lesseqgtr 1. \\ \infty \end{cases}$

2. $\begin{cases} (-1)^{2n} = +1, \quad (-1)^{2n+1} = -1 \\ (-a)^{2n} = +a^{2n}, \quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1} \\ (a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}, \quad (a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1}. \end{cases}$

3. $a^m\,.\,a^r = a^{m+r}$

$$a^m : a^r = \begin{cases} a^{m-r}, & \text{wenn } m > r \\ 1, & \text{,, } m = r \\ \dfrac{1}{a^{r-m}}, & \text{,, } m < r \end{cases}$$

4. $(a\,b)^m = a^m\,b^m$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

6. $(a^m)^r = a^{m\,r}$

7. $\dfrac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}.$

8. $\left.\dfrac{a^m - b^m}{a - b}\right|_{a=b} = \dfrac{0}{0} = m\,a^{m-1}.$

II. Negative Exponenten.

Erklärung: $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}.$

1. $\begin{cases} a^m \cdot a^{-r} = a^{m-r} \\ a^{-m} \cdot a^r = a^{-m+r} \\ a^{-m} \cdot a^{-r} = a^{-m-r} = a^{-(m+r)}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} a^m : a^{-r} = a^{m+r} \\ a^{-m} : a^r = a^{-m-r} \\ a^{-m} : a^{-r} = a^{-m+r}. \end{cases}$

3. $(ab)^{-m} = a^{-m}b^{-m}.$

4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \dfrac{a^{-m}}{b^{-m}} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m.$

5. $\begin{cases} (a^m)^{-r} = a^{-mr} \\ (a^{-m})^r = a^{-mr} \\ (a^{-m})^{-r} = a^{mr}. \end{cases}$

§ 13. Wurzeln.

Erklärung: Wenn $x^n = a$, dann $x = \sqrt[n]{a}$, also

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \quad \sqrt[n]{a^n} = a$$

Benennungen: Bei $\sqrt[n]{a}$ heisst a Radikand, n Wurzelexponent;

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$$

I. Wurzelformeln:

1. $\sqrt[n]{1} = 1;\quad \sqrt[n]{0} = 0;\quad \sqrt[2n+1]{1} = 1;\quad \sqrt[2n+1]{-1} = -1.$

2. $\sqrt[1]{a}=a;\quad \sqrt[2n+1]{a^{2n+1}}=a,\quad \sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}}=-a;$

$\sqrt[2n]{(-a)^{2n}}=-a.$

3. $\sqrt[n]{a}\,.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}.$

4. $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$

5. $\sqrt[n]{a^r}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^r.$

6. $\sqrt[n]{a^r}=\sqrt[nx]{a^{rx}};\quad \sqrt[-n]{a^r}=\sqrt[n]{a^{-r}}.$

7. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$

8. $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}.$

II. Rationalmachen des Nenners:

1. $\frac{z}{\sqrt{a}}=\frac{z\sqrt{a}}{a};\quad \frac{z}{\sqrt[n]{a}}=\frac{z\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}.$

2. $\frac{z}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{z(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b};$

$$\frac{z}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}=\frac{z\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a\pm b}$$

3. $\frac{z}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{z(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c}$

$$=\frac{z(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab};$$

besonderer Fall $a+b=c$.

4. $$\frac{z}{\sqrt{a+\sqrt{b}}} = \frac{z\sqrt{a+\sqrt{b}}}{a+\sqrt{b}} = \frac{z\sqrt{a+\sqrt{b}}(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$$
$$= \frac{z\sqrt{(a^2-b)(a-\sqrt{b})}}{a^2-b}.$$

III. Zerlegung einer Quadrat-Wurzel:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+r}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-r}{2}}, \text{ wobei } r = \sqrt{a^2-b}.$$

IV. Beispiele für Quadrat- und Kubikwurzelausziehung:

1. $\sqrt{12|53|16} = 354$

$$\begin{array}{r|l}
 & 9 \\ \hline
6 & 353 \\
 & 325 \\ \hline
70 & 2816 \\
 & 2816 \\ \hline
 & ==== \\
\end{array}$$

2. $\sqrt[3]{44|361|864} = 354$

$$\begin{array}{r|l}
 & 27 \\ \hline
27 & 17361 \\
 & 135 \\
 & \quad 225 \\
 & \quad\; 125 \\ \hline
3675 & 1486864 \\
 & 14700 \\
 & \quad 1680 \\
 & \qquad\; 64 \\ \hline
 & ======= \\
\end{array}$$

3. $\sqrt{\left(25x^6 - 30x^5 + 79x^4 - 57x^3 + 58x^2 - 21x + \frac{9}{4}\right)}$

$$\begin{array}{l}
\pm 25x^6 \qquad\qquad\qquad\qquad = 5x^3 - 3x^2 + 7x - \frac{3}{2} \\
10x^3 \,\big|\, -30x^5 + 79x^4 \\
\qquad\ \ \mp 30x^5 \pm 9x^4 \\
10x^3 - 6x^2 \,\big|\, +70x^4 \\
\qquad\qquad\quad \pm 70x^4 \mp 42x^3 \pm 49x^2 \\
10x^3 - 6x^2 + 14x \,\big|\, -15x^3 + 9x^2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \mp 15x^3 \pm 9x^2 \mp 21x \pm \frac{9}{4} \\
\hline
\qquad\qquad = \quad = \quad = \quad =
\end{array}$$

4. $\sqrt[3]{(125x^9 - 225x^8 + 660x^7 - 657x^6 + 924x^5 - 441x^4 + 343x^3)}$

$$\begin{array}{l}
\pm 125x^9 \qquad\qquad\qquad\qquad = 5x^3 - 3x^2 + 7x \\
75x^6 \,\big|\, -225x^8 \\
\qquad\ \ \mp 225x^8 \pm 135x^7 \mp 27x^6 \\
75x^6 - 90x^5 + 27x^4 \,\big|\, +525x^7 - 630x^6 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \pm 525x^7 \mp 630x^6 \pm 189x^5 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \pm 735x^5 \mp 441x^4 \pm 343x^3 \\
\hline
\qquad\qquad = \quad = \quad = \quad = \quad =
\end{array}$$

§ 14. Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Erklärung: $a^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{a^r}$; $a^{-\frac{r}{n}} = a^{\frac{-r}{n}} = a^{\frac{r}{-n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{r}{n}}} = \sqrt[n]{a^{-r}}$

$$= \sqrt[-n]{a^r} = \frac{1}{\sqrt{a^r}}$$

1. $1^{\frac{r}{n}} = 1$; $0^{\frac{r}{n}} = 0$.
2. $a^{\frac{r}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{n} + \frac{p}{q}}$.
3. $a^{\frac{r}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{n} - \frac{p}{q}}$.

4. $(ab)^{\frac{r}{n}} = a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{r}{n}}$.

5. $(a : b)^{\frac{r}{n}} = a^{\frac{r}{n}} : b^{\frac{r}{n}}$.

6. $\left(a^{\frac{r}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{n} \cdot \frac{p}{q}}$.

§ 15. Imaginäre und komplexe Zahlen.

Erklärung: $\sqrt{-1} = i$ (imaginäre Einheit),
$\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$ (imaginäre Zahl),
$a + bi$ (komplexe Zahl; Normalform).

1.
$$\begin{array}{ll} i = i & i^{4n} = +1 \\ i^2 = -1 & i^{4n+1} = i \\ i^3 = -i & i^{4n+2} = -1 \\ i^4 = +1 & i^{4n+3} = -i. \end{array}$$

2. $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = i^2\sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$; $(\sqrt{-a})^2 = -a$;
$\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{a : b}$.

3. Konjugierte komplexe Zahlen: $a + bi$ und $a - bi$,
$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

4. Wenn $a + bi = 0$, dann ist $a = 0$ und $b = 0$,
„ $a + bi = x + iy$, dann ist $a = x$, $b = y$.

5. Setzt man: $a = r \cos\varphi$ (φ Anomalie),
$b = r \sin\varphi$ (r Modulus),
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$, dann ist
$\underline{a \pm bi = r(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)}$ (Kanonische Form)

allgemeiner:

$$\mathbf{a \pm bi = r\big((\cos\varphi + 2k\pi) \pm i \sin(\varphi + 2k\pi)\big).}$$

6. $(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)(\cos\psi \pm i \sin\psi)$
$= \cos(\varphi + \psi) \pm i \sin(\varphi + \psi)$.

7. Moivre's Formel:

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}(2k\pi+\varphi) \pm i\sin\frac{m}{n}(2k\pi+\varphi);$$

im einzelnen: $(\cos\varphi \pm \sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi$

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi+\varphi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi+\varphi}{n}.$$

§ 16. Logarithmen.

Erklärung: Wenn $c^x = a$, dann ist $x = \overset{c}{\log}\, a$, daher

$$c^{\overset{c}{\log} a} = a;\quad \overset{c}{\log}\,(c^n) = n;\quad \overset{c}{\log}\,(c^{-n}) = -n$$

c heisst die Basis, a der Logarithmand, n der Logarithmus.

1. $\log ab = \log a + \log b$
2. $\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$
3. $\log a^n = n \log a$
4. $\log\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log a$
5. $\overset{c}{\log}\, c = 1;\ \overset{c}{\log} 1 = 0;\ \overset{c}{\log} 0 = -\infty;\ \overset{c}{\log}\infty = \infty$
6. die Basis der künstlichen, oder gemeinen, oder Briggschen Logarithmen ist 10; die Basis der natürlichen Logarithmen, welche mit log nat, oder log n oder l bezeichnet werden, ist $e = 2{,}71828\ldots$ (s. § 29)
7. $\overset{b}{\log}\, a = \dfrac{\overset{c}{\log}\, a}{\overset{c}{\log}\, b};\quad \overset{c}{\log}\, a = \overset{b}{\log}\, a \,.\, \overset{c}{\log}\, b$
8. Umrechnung der gemeinen in natürliche Logarithmen:

a) $l\,10 = \overset{e}{\log}\, 10 = \dfrac{\overset{10}{\log}\, 10}{\overset{10}{\log}\, e} = \dfrac{1}{0{,}43429\ldots} = 2{,}30259\ldots$

$$\text{b) } l\,a = \overset{e}{\log}\, a = \frac{\overset{10}{\log}\, a}{\overset{10}{\log}\, e} = \overset{10}{\log}\, a \,.\, 2{,}30259\ldots$$

Weiteres über Logarithmen s. § 29.

§ 17. Kettenbrüche.

1. Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Kettenbruch:

$$\text{a) } \frac{14}{47} = \frac{1}{\frac{47}{14}} = \frac{1}{3+\frac{5}{14}} = \frac{1}{3+\frac{1}{\frac{14}{5}}} = \frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{4}{5}}}$$

$$= \frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{5}{4}}}} = \frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}}$$

$$\text{b) } \begin{array}{r|r|r|r|l} 14 & 47 & \underline{3} & & \\ & \underline{42} & & & \\ & 5 & 14 & \underline{2} & \\ & & \underline{10} & & \\ & & 4 & 5 & \underline{1} \\ & & & \underline{4} & \\ & & & 1 & 4 \mid \underline{4} \end{array}$$

die Nenner sind 3, 2, 1, 4.

2. Statt eines Kettenbruches k kann man stets folgenden schreiben:

$$\frac{1}{0+\frac{1}{0+k}},$$ dessen erster Näherungswert $\frac{1}{0}$, dessen zweiter $\frac{0}{1}$ ist.

3. Verwandlung eines Kettenbruches in einen gewöhnlichen Bruch.

Sind $\frac{A_1}{B_1}$, $\frac{A_2}{B_2}$ u. s. f. die einzelnen Näherungswerte des Kettenbruches $\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$, so ist:

$$\frac{A_{r+1}}{B_{r+1}} = \frac{a_{r+1} A_r + A_{r-1}}{a_{r+1} B_r + B_{r-1}}; \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{1}{a_1}; \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{a_2}{a_2 a_1 + 1}$$

u. s. f.

Schema:

		a_1	a_2	a_3
$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{a_1}$	$\frac{a_2}{a_2 a_1 + 1}$	$\frac{a_3 a_2 + 1}{a_3 (a_2 a_1 + 1) + a_1}$

		3	2	1	4
$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{14}{47}$

4. $A_{r-1} . B_r - A_r . B_{r-1} = (-1)^r$

$$\frac{A_{r-1}}{B_{r-1}} - \frac{A_r}{B_r} = \frac{(-1)^r}{B_{r-1} . B_r}$$

$$\frac{A_{r-1}}{B_{r-1}} - \frac{A_r}{B_r} < \frac{(-1)^r}{B^2_{r-1}}$$

5. Sätze:
   1. Die aufeinanderfolgenden Näherungswerte (N.-W.) eines Kettenbruches sind abwechselnd grösser und kleiner als der wahre Wert derselben und zwar sind die ungeraden (der 1., 3. . . .) grösser, die geraden (der 2., 4. . . . .) kleiner als der wahre Wert des Kettenbruches.
   2. Jeder N.-W. liegt dem wahren Wert des K.-Br. näher als der vorhergehende.
   3. Der Unterschied des wahren Wertes des K.-Br.

und eines N.-W. ist kleiner als der reziproke Wert des Quadrates vom Nenner dieses N.-W.

4. Die N.-W. eines K.-Br. sind in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, d. h. Zähler und Nenner sind relative Primzahlen.
5. Kein Bruch, dessen Nenner kleiner ist als der Nenner eines N.-W., kommt dem wahren Wert des K.-Br. näher als dieser N.-W.

§ 18. Kombinationslehre.

I. Permutationen.

1. Die Permutationen aus n Elementen bestehen aus den Komplexionen, in denen sämtliche Elemente vorkommen; die Gruppen unterscheiden sich nur durch die Stellung der Elemente.

Die Permutationen von a, b, c, d sind:

a b c d	b a c d	c a b d	d a b c
a b d c	b a d c	c a d b	d a c b
a c b d	b c a d	c b a d	d b a c
a c d b	b c d a	c b d a	d b c a
a d b c	b d a c	c d a b	d c a b
a d c b	b d c a	c d b a	d c b a

2. Die Anzahl der Permutationen aus n verschiedenen Elementen ist:

$$P(n) = 1 . 2 . 3 \ldots (n-1) . n$$
$$= n! \text{ („n Fakultät")}$$

3. Sind unter den nElementen α unter sich gleiche Elemente, ebenso ferner β und γ je unter sich gleiche Elemente, so ist die Anzahl der Permutationen:

$$\underset{(\alpha,\,\beta,\,\gamma)}{P\,(n)} = \frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!}$$

Bestehen die n Elemente aus 2 Gruppen von r und n — r je unter sich gleichen Elementen, dann ist die Anzahl:

$$\underset{(r,\, n-r)}{P(n)} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$
$$= \binom{n}{r}, \text{ vergl. § 21.}$$

4. Irgend zwei Elemente einer Komplexion bilden eine **Nichtfolge** (Inversion), wenn das erste Element höher ist als das zweite.

Durch Vertauschung zweier Elemente einer Komplexion ändert sich die Zahl der Nichtfolgen um eine ungerade Zahl.

II. Variationen.

5. Die **Variationen** aus n Elementen der rten Klasse bestehen aus allen Komplexionen, die sich aus je r der n Elemente bilden lassen. Die Variationen zweiter Klasse der 4 Elemente a b c d sind:

ohne Wiederholung			mit Wiederholung			
ab	ac	ad	aa	ab	ac	ad
ba	bc	bd	ba	bb	bc	bd
ca	cb	cd	ca	cb	cc	cd
da	db	dc	da	db	dc	dd

6. Die **Anzahl** der Variationen aus n Elementen zur rten Klasse ist

$$V_r(n) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \binom{n}{r} . r! \text{ (s. § 21)}$$

$$V_n(n) = n(n-1)(n-2)\ldots 1 = n! \text{ (Permutationen).}$$

7. Die Anzahl der Variationen mit **Wiederholung** ist: $V'_r(n) = n^r$.

III. Kombinationen.

8. Die **Kombinationen** aus n Elementen zur rten Klasse sind die Komplexionen, die sich aus je r der

n Elemente bilden lassen, wobei aber blosse Verstellung der Glieder keine neue Kombination ergiebt.

Die Kombinationen der vier Elemente a, b, c, d zur zweiten Klasse sind:
ohne Wiederholung: ab, ac, ad, bc, bd, cd;
mit „ aa, ab, ac, ad; bb, bc, bd; cc, cd; dd.

9. Die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur rten Klasse ist

$$K_r(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Aus den Kombinationen ergeben sich die Variationen, wenn man die Elemente der einzelnen Kombinationen permutiert.

10. Die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur rten Klasse mit Wiederholung ist

$$K'_r(n) = \frac{n(n+1)(n+2)\dots\dots(n+r-1)}{r!} = \binom{n+r-1}{r}.$$

§ 19. Determinanten.

1. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Unter der Determinante eines Systems von n^2 Elementen $a_1, a_2, \dots a_n$, $b_1, b_2, \dots b_n, \dots\dots$ versteht man die Summe $\Sigma(\pm a_1\, b_2\, c_3 \dots)$, in welcher jedes Glied alle Buchstaben und Indices ohne Wiederholung enthält und welche zugleich alle möglichen Produkte umfasst, die durch Permutation der Indices gebildet werden können. Jedes (alphabetisch geordnete) Glied ist positiv oder negativ zu setzen, je nachdem die Anzahl der Nichtfolgen der Indices gerade oder ungerade ist.

2. Der Wert einer Determinante wird nicht geändert, wenn die Vertikal- als Horizontalreihen und umgekehrt geschrieben werden. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

3. Werden irgend zwei Horizontal- oder zwei Vertikalreihen mit einander vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

4. Sind in einer Determinante zwei Horizontal- oder zwei Vertikalreihen völlig übereinstimmend, so ist der Wert der Determinante gleich Null.

5. Bezeichnet man in einer Determinante $\varDelta$ den Faktor von a_r mit A_r (Unterdeterminante), den von b_r mit B_r, dann ist

$$\begin{aligned} \varDelta &= a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots\ldots + a_n A_n \\ &= b_1 B_1 + b_2 B_2 + \ldots\ldots + b_n B_n \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \text{ ferner ist} \end{aligned}$$

$$b_1 A_1 + b_2 A_2 + \ldots. + b_n A_n = c_1 A_1 + c_2 A_2 + \ldots. + c_n A_n = 0.$$

6. Wenn alle Elemente einer Horizontal- oder einer Vertikalreihe mit demselben Faktor multipliziert sind, so ist die Determinante mit diesem Faktor multipliziert. Z. B.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Sind alle Elemente einer Reihe 0, so ist die ganze Determinante gleich Null.

7. Wenn jedes Element einer Reihe eine Summe zweier Grössen ist, so ist die Determinante in die Summe zweier Determinanten zerlegbar; z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

oder: $(a_1+\alpha_1)A_1+(a_2+\alpha_2)A_2+(a_3+\alpha_3)A_3=a_1A_1+a_2A_2$
$+a_3A_3+\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\alpha_3A_3.$

Bestehen die Glieder einer Reihe aus m, die einer andern aus n und die einer dritten aus p Summanden, so ist die Determinante in m. n. p Determinanten zerlegbar.

8. Der Wert einer Determinante bleibt unverändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe beliebige, gleich vielfache der entsprechenden Elemente einer andern Reihe addiert; z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+ka_1 \\ a_2 & b_2 & c_2+ka_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+ka_3 \end{vmatrix}$$

9. Wenn

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ und } \varDelta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \text{ dann ist}$$

$$D\,.\,\varDelta = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

10. Wenn alle diejenigen Elemente einer Determinante verschwinden, welche m Vertikal- mit n — m Horizontalreihen gemeinschaftlich haben, so lässt sich dieselbe in das Produkt zweier Determinanten zerlegen; z. B.:

$$\left|\begin{array}{cc:ccc} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ \hdashline 0 & 0 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 0 & c_4 & d_4 & e_4 \\ 0 & 0 & c_5 & d_5 & e_5 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & d_3 & e_3 \\ c_4 & d_4 & e_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix}$$

11. Jede Determinante kann auf folgende Weise erweitert werden:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \beta_4 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

§ 20. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1. Ist für ein Ereignis die Anzahl aller möglichen Fälle m, die der günstigen Fälle (Treffer) t, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen:

$$w = \frac{t}{m},$$

für das Nichteintreffen

$$u = \frac{m - t}{m} = 1 - w, \text{ also}$$

$$\text{I. } w + u = 1.$$

2. Ist bei m möglichen Fällen $w_1 = \frac{t_1}{m}$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses E_1 und $w_2 = \frac{t_2}{m}$ diejenige für das Eintreffen von E_2, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass entweder E_1 oder E_2 eintrifft:

$$\text{II. } W = w_1 + w_2.$$

3. Die Wahrscheinlichkeit, dass mehrere Ereignisse E_1, E_2, E_3 ... gleichzeitig (oder nacheinander) eintreffen, ist:

$$\text{III. } W = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \ldots .$$

4. Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei Ereignissen E_1 und E_2 das erste eintrifft, ist

$$\text{IV. } W = \frac{w_1}{w_1 + w_2}.$$

5. Soll von zwei Ereignissen E_1 und E_2 eintreten:

1. E_1 und E_2, so ist $W = w_1 \cdot w_2$;
2. E_1, aber nicht E_2, so ist $W = w_1 (1 - w_2)$;
3. E_1 nicht, aber E_2, so ist $W = (1 - w_1) \cdot w_2$;
4. Eines, aber nicht beide, so ist $W = w_1 (1 - w_2) + (1 - w_1) \cdot w_2$;
5. Höchstens eines von beiden, so ist $W = 1 - w_1 w_2$;
6. Wenigstens eines von beiden, so ist $W = w_1 + w_2 - w_1 w_2$;
7. Beide oder keines, so ist $W = 1 - w_1 (1 - w_2) - (1 - w_1) w_2$;
8. E_1 n mal, E_2 m mal in bestimmter Reihenfolge, dann ist $W = w_1{}^n \cdot w_2{}^m$; ist die Reihenfolge beliebig, dann ist
$$W = \frac{(n + m)!}{n!\, m!} w_1{}^n \cdot w_2{}^m.$$

§ 21. Binomialkoeffizienten.

1. Der Bruch $\frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r}$, gelesen „n über r", heisst Binomialkoeffizient.

2. Ist n positiv und ganz, so wird $\binom{n}{r} = 0$, wenn

Arithmetik, Algebra und niedere Analysis.

I. Abschnitt.

Grundoperationen und Kombinatorik.

§ 1. Benennungen.

Summe: $a + b$; a und b Summanden.

Differenz: $a - b$; a Minuend, b Subtrahend.

Produkt: $a \, . \, b$; a und b Faktoren (a Multiplikator, b Multiplikand).

Quotient: $a : b$; a Dividend, b Divisor.

§ 2. Addition.

1. $a + b = b + a$.
2. $a + (b + c) = a + b + c$
$= a + c + b = b + a + c = b + c + a$
$= c + a + b = c + b + a$

2.' $a + (b + c + d + \ldots) = a + b + c + d + \ldots$
$= b + a + c + d + \ldots = \ldots$

3. $a + 0 = 0$; $0 + a = a$; $0 + 0 = 0$.

§ 3. Subtraktion.

1. Erklärung: $(a - b) + b = a$.
2. $a + b - b = a$.
3. $a - a = 0$; $a - 0 = a$; $0 - 0 = 0$.

$r > n$; ist aber n gebrochen oder negativ, so wird $\binom{n}{r}$ für keinen Wert von r Null.

$$\binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{0} = 1.$$

3. $$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}.$$

4. $$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}.$$

5. $$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \binom{n-2}{r} + \ldots + \binom{r}{r}.$$

6. $$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{r}\binom{n}{o} + \binom{m}{r-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{r-2}\binom{n}{2} + \ldots + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{m}{o}\binom{n}{r}.$$

II. Abschnitt.

Reihen.

A. Endliche Reihen.

§ 22. Arithmetische Reihen erster Ordnung.

Reihe: $a, \ a+d, \ a+2d, \ \ldots a+(n-1)d.$

1. $z = a + (n-1)d.$

2. $$s = \frac{(a+z)\,.\,n}{2} = \frac{(2a+(n-1)d)\,.\,n}{2}.$$

§ 23. Geometrische Reihen.

Reihe: $a, \ aq, \ aq^2, \ aq^3 \ldots aq^{n-1}.$

1. $z = aq^{n-1}.$

2. $$s = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} = \frac{qz - a}{q-1}.$$