Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

II. Abschnitt. Reihen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

$r > n$; ist aber n gebrochen oder negativ, so wird $\binom{n}{r}$ für keinen Wert von r Null.

$$\binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{0} = 1.$$

3. $$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}.$$

4. $$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}.$$

5. $$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \binom{n-2}{r} + \ldots + \binom{r}{r}.$$

6. $$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{r}\binom{n}{o} + \binom{m}{r-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{r-2}\binom{n}{2} + \ldots + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{m}{o}\binom{n}{r}.$$

II. Abschnitt.

Reihen.

A. Endliche Reihen.

§ 22. Arithmetische Reihen erster Ordnung.

Reihe: $a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots a+(n-1)d$.

1. $z = a + (n-1)d$.

2. $$s = \frac{(a+z)\,.\,n}{2} = \frac{(2a + (n-1)d)\,.\,n}{2}.$$

§ 23. Geometrische Reihen.

Reihe: $a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3 \ldots aq^{n-1}$.

1. $z = aq^{n-1}$.

2. $$s = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} = \frac{qz - a}{q-1}.$$

3. Ist $n = \infty$ und $0 < q < 1$, dann ist $s = \frac{a}{1-q}$.

4. $$\left.\begin{array}{l} 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots = \dfrac{1}{1-x} \\ 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots = \dfrac{1}{1+x} \end{array}\right\} 0 < x < 1.$$

§ 24. Zinseszins- und Rentenrechnung.

Zinsfuss p %, Zinsfaktor $q \left(= 1 + \frac{p}{100}\right)$, ursprüngliches Kapital a, angewachsenes b, Zahl der Zinsperioden (Jahre) n, Rente r.

1. $b = a q^n$ (Zinseszinsformel).

2. $b = a q^n \pm \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$ (erste Rentenformel).

3. $b = \frac{r(q^n - 1)}{q - 1}$ (zweite Rentenformel).

4. $b = \frac{r q (q^n - 1)}{q - 1}$ (dritte Rentenformel).

5. $a = r \cdot \frac{q^n - 1}{(q-1) \cdot q^n} = \frac{r}{q-1}\left(1 - \frac{1}{q^n}\right)$.

5'. $a = \frac{r}{q-1}$ $(n = \infty)$.

6. $b q^n = b \frac{p_1}{100} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

1. Giebt den Endwert an, auf den das Kapital a in n Jahren durch Zinseszins anwächst.

2. Giebt den Endwert an, den a durch Zinseszins erreicht, wenn dasselbe am Ende jedes Jahres noch um r vermehrt oder vermindert wird; wird a in n Jahren aufgezehrt, so ist $b = 0$.

3. Giebt die Summe an, welche bis zum Ende des

nten Jahres erreicht ist, durch eine am Ende jedes Jahres erfolgende Zahlung r.

4. Stellt denselben Wert dar wie 3, wofern die Zahlung r am Jahresanfang geleistet wird.

5. a ist das Ablösungskapital (Mise) einer n mal am Jahresende wiederkehrenden Rente.

5'. a Ablösungskapital einer immerwährenden Rente.

6. Amortisation. Die Gleichung giebt die Bedingung an, unter der ein Kapital b in n Jahren durch Verzinsung mit p_1 % getilgt werden kann, wenn der Zinsfaktor (bei dem üblichen Zinsfuss p) q ist.

§ 25. Arithmetische Reihen höherer Ordnung.

1. Reihe: $y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \ldots y_n$

erste Differenzenreihe: $\Delta y_0 \quad \Delta y_1 \quad \Delta y_2 \quad \Delta y_3 \ldots$

zweite „ $\Delta^2 y_0 \quad \Delta^2 y_1 \quad \Delta^2 y_2 \ldots$

dritte „ $\Delta^3 y_0 \quad \Delta^3 y_1 \ldots$

$$\Delta^{r+1} y_m = \Delta^r y_{m+1} - \Delta^r y_m.$$

Ist die rte Differenzenreihe konstant, so ist die Reihe von der rten Ordnung.

$$2.\ y_n = y_0 + \binom{n}{1} \Delta y_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{n}{3} \Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{n}{r} \Delta^r y_0.$$

Sätze: 1. Das Glied y_n einer Reihe rter Ordnung ist eine ganze Funktion rten Grades von n.

2. Ist $y_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 \ldots + a_r n^r$ also eine ganze Funktion rten Grades von n, so ist die Reihe, welche man erhält, indem man $n = 0, 1, 2 \ldots$ setzt, von rter Ordnung.

Wenn die Reihe mit y_1 anfängt, dann ist:

$$y_n = y_1 + \binom{n-1}{1} \Delta y_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 y_1 + \binom{n-1}{3} \Delta^3 y_1 + \ldots + \binom{n-1}{r} \Delta^r y_1.$$

3. $$\mathbf{s_n} = \binom{\mathbf{n+1}}{\mathbf{1}} \mathbf{y_0} + \binom{\mathbf{n+1}}{\mathbf{2}} \Delta \mathbf{y_0} + \binom{\mathbf{n+1}}{\mathbf{3}} \Delta^2 \mathbf{y_0} + \ldots + \binom{\mathbf{n+1}}{\mathbf{r+1}} \Delta^r \mathbf{y_0}$$

oder bei der zweiten Bezeichnung:

$$s_n = \binom{n}{1} y_1 + \binom{n}{2} \Delta y_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 y_1 + \ldots + \binom{n}{r+1} \Delta^r y_1.$$

4. $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}(2n+1)(n+1).n;$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2.n^2.$$

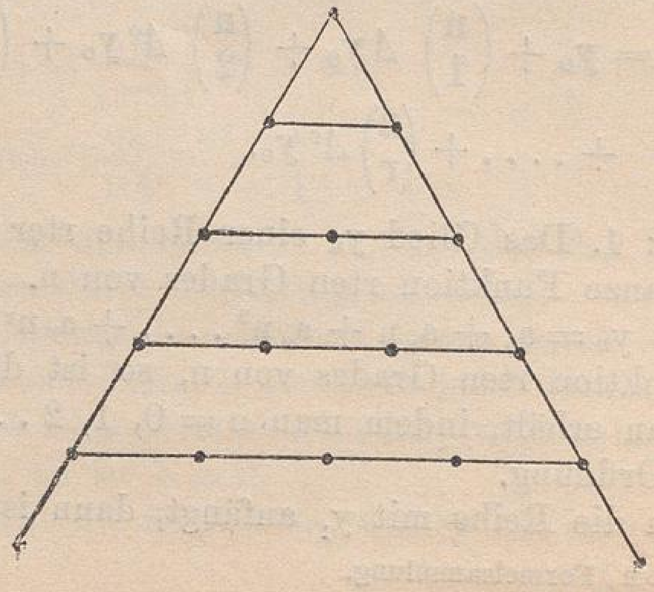
5. Figurierte Zahlen.

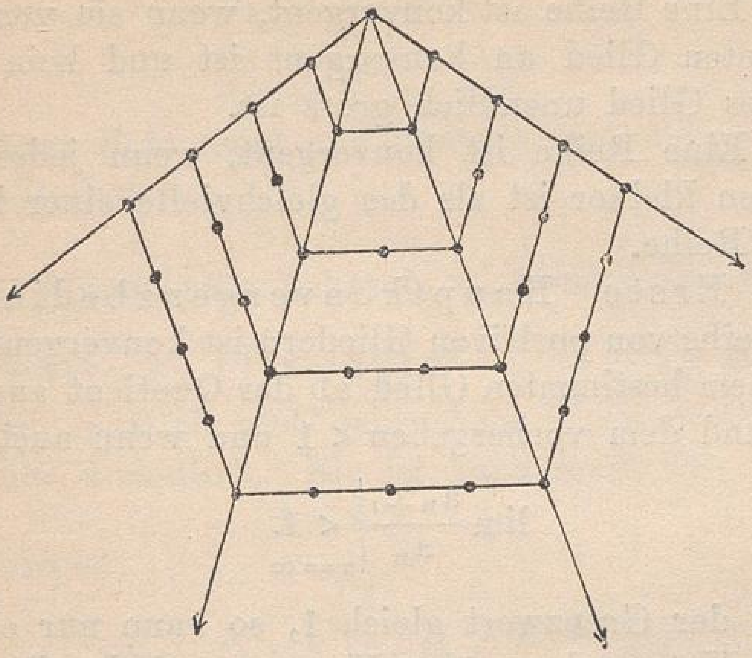
a. Polygonalzahlen:

Dreieckszahlen: 1 3 6 10 15 21 ...., $\binom{n+1}{2}$.

Viereckszahlen: 1 4 9 16 25 ...., n^2,

Fünfeckszahlen: 1 5 12 22 35 ...., $\frac{3n^2-n}{2}$.





b) Pyramidalzahlen.

dreieckige: 1 4 10 20 35 ...., $\binom{n+1}{2} + 1 \cdot \binom{n+1}{3}$

$= \binom{n+2}{3}$,

viereckige; 1 5 14 30 55 ...., $\binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$,

fünfeckige: 1 6 18 40 75 ...., $\binom{n+1}{2} + 3\binom{n+1}{3}$.

B. Unendliche Reihen.

§ 26. Konvergenzbedingungen.

1. Eine Reihe $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ heisst konvergent, wenn die Grenze von s_n bei unbegrenzt wachsendem n eine endliche Zahl ist.

2. die abnehmende geometrische Reihe ist konvergent, also $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots$ ist konv., wenn der absolute Betrag von $x < 1$.

3. Eine Reihe ist konvergent, wenn sie von einem bestimmten Glied an konvergent ist und kein vorangehendes Glied unendlich gross ist.

4. Eine Reihe ist konvergent, wenn jedes Glied derselben kleiner ist als das gleichvielte einer konvergenten Reihe.

5. Erste Hauptkonvergenzbedingung: Eine Reihe von positiven Gliedern ist konvergent, wenn von einem bestimmten Glied ab der Quotient aus einem Glied und dem vorhergehen < 1 und wenn auch

$$\lim \left. \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|_{n=\infty} < 1.$$

Ist der Grenzwert gleich 1, so kann nur eine besondere Untersuchung über Konvergenz oder Divergenz entscheiden.

6. Zweite Hauptkonvergenzbedingung: Eine Reihe mit abwechselnden Zeichen konvergiert, wenn die Glieder von einer bestimmten Stelle an abnehmen und $\lim a_n = 0$

(Bei einer Reihe mit gleichen Zeichen ist diese Bedingung notwendig, aber nicht hinreichend.)

7. Jede Reihe mit negativen oder abwechselnden Gliedern ist konvergent, wenn sie konvergiert, falls man alle Glieder positiv setzt.

8. Eine Reihe heisst divergent, wenn $\lim s_n$ nicht endlich ist. Dies ist der Fall, wenn $\lim a_n$ nicht 0 ist.

§ 27. Satz von der Koeffizientenvergleichung.

Ist

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots$$

und sind beide Reihen konvergent, so ist

$$A_0 = B_0$$
$$A_1 = B_1$$
$$A_2 = B_2 \text{ u. s. f.}$$

Dieser Satz dient zur Entwickelung von Funktionen in Reihen.

§ 28. Binomischer Lehrsatz — Newtonsche Reihe.

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + \binom{n}{r} x^r + \ldots$$

Für negative und gebrochene Werte von n wird die Reihe unendlich. Sie ist konvergent für

$$1 > x > -1.$$

Beispiel:

$$\sqrt{a^2+b^2} = a\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = a\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2}+\binom{\frac{1}{2}}{2}\frac{b^4}{a^4}+\ldots\right)$$

Ist b gegen a sehr klein, dann ist

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a} \quad \text{(Näherungsformel.)}$$

$$\sqrt[3]{a^3 \pm b} = a \pm \frac{b}{3a^2} \quad \text{"}$$

§ 29. Exponentialreihe, logarithmische, trigonometrische und cyklometrische Reihen.

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n_{n=\infty}$$
$$= 2{,}7182818284\ldots.$$

2. $a^x = e^{x\,la} = 1 + \frac{x\,la}{1!} + \frac{(x\,la)^2}{2!} + \frac{(x\,la)^3}{3!} + \ldots$

3. $l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots, \quad 1 \geq x > -1$

4. $l(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots 1 > x > -1$

5. $\begin{cases} l\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right\} 1 > x > -1 \text{ oder} \\ l\,z = 2\left\{\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right\} \end{cases}$

6. $\begin{cases} l(a+h) - l\,a = 2\left\{\frac{h}{2a+h} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{2a+h}\right)^3 + \ldots\right\} \\ \log(a+h) = \log a + 2M\left\{\frac{h}{2a+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2a+h}\right)^3 + \ldots\right\} \end{cases}$

7. Uebergang vom natürlichen zum Briggschen System:

$$10^{\overset{10}{\log} z} = z$$

$$\overset{10}{\log} z \,.\, l\,10 = l\,z$$

$$\mathbf{\overset{10}{\log}\, z = \frac{l\,z}{l\,10} = M_{10} \,.\, l\,z}$$

M_{10} = Modulus des Briggschen Systems $= \frac{1}{l\,10}$
$= 0{,}4342945 \ldots$ (s. auch § 16_8).

---

8. $\begin{cases} \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots \quad x = \text{arc } x^0 \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \end{cases}$

9. $\cos x + i \sin x = e^{ix}$

$\cos x - i \sin x = e^{-ix}$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

10. $e^{\varphi} = e^{\varphi + 2k\pi i}$; $e^{2k\pi i} = 1$, $e^{(2k+1)\pi i} = -1$

11. Ist $y = e^x = e^{x+2k\pi i}$, so ist

$$l y = x + 2k\pi i.$$

$l(-1) = (2k+1)\pi i$; $l(-y) = l y + (2k+1)\pi i$.

Ist $y + iz = r e^{\varphi i}$, so ist

$$l(y + iz) = l r + (\varphi + 2k\pi) i.$$

12.
$$\begin{cases} \operatorname{arc\,sin} x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6} \\ \qquad \cdot\frac{x^7}{7} + \ldots\ldots \\ \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots \quad 1 \geqq x \geqq -1 \\ \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\ldots \quad \text{(Leibnizsche Reihe.)} \end{cases}$$

Zur Berechnung von π kann folgende Formel benützt werden:

$$\begin{cases} \pi = 6 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{12}\left\{1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \ldots\ldots\right\} \\ \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} \\ \qquad + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} \\ \frac{\pi}{4} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}. \end{cases}$$

III. Abschnitt.

Gleichungen.

§. 30. Gleichungen ersten Grades.

a) Umformungs- und Versetzungsregeln:

1. Jede Gleichung bleibt richtig, wenn auf jeder Seite dieselbe Operation mit derselben Zahl vorgenommen wird.