Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

III. Abschnitt. Gleichungen.

10. $e^{\varphi} = e^{\varphi + 2k\pi i}$; $e^{2k\pi i} = 1$, $e^{(2k+1)\pi i} = -1$

11. Ist $y = e^x = e^{x+2k\pi i}$, so ist

$$ly = x + 2k\pi i.$$

$$l(-1) = (2k+1)\pi i;\quad l(-y) = ly + (2k+1)\pi i.$$

Ist $y + iz = re^{\varphi i}$, so ist

$$l(y+iz) = lr + (\varphi + 2k\pi)i.$$

12.
$$\begin{cases} \operatorname{arc\,sin} x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6} \\ \qquad\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots. \\ \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots. \quad 1 \geqq x \geqq -1 \\ \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots. \quad \text{(Leibnizsche Reihe.)} \end{cases}$$

Zur Berechnung von π kann folgende Formel benützt werden:

$$\begin{cases} \pi = 6 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{12}\left\{1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \ldots.\right\} \\ \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} \\ \qquad + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8} \\ \frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7}. \end{cases}$$

III. Abschnitt.

Gleichungen.

§. 30. Gleichungen ersten Grades.

a) Umformungs- und Versetzungsregeln:

1. Jede Gleichung bleibt richtig, wenn auf jeder Seite dieselbe Operation mit derselben Zahl vorgenommen wird.

2. Ein freier Summand der einen Seite kann auf die andere Seite als Subtrahend gesetzt werden und umgekehrt.

3. Eine Zahl, welche Faktor der gesamten einen Seite ist, kann auf die andere Seite als Divisor derselben gesetzt werden und umgekehrt.

4. Eine Zahl, welche Potenzexponent der gesamten einen Seite ist, kann auf die andere Seite als Wurzelexponent derselben gesetzt werden und umgekehrt.

b) Gleichungen mit einer Unbekannten.

5. Aus
$$\begin{cases} x+a=b & \text{folgt} \quad x=b-a \\ x-a=b & \text{„} \quad x=b+a. \end{cases}$$
$$\begin{cases} ax=b & \text{„} \quad x=\dfrac{b}{a} \\ \dfrac{x}{a}=b & \text{„} \quad x=ab \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^n=a & \text{„} \quad x=\sqrt[n]{a} \\ \sqrt[n]{x}=a & \text{„} \quad x=a^n. \end{cases}$$

6. Aus
$$\begin{cases} ax=0 \text{ folgt } x=0 \\ a(x-b)=0 \text{ folgt } x-b=0 \\ (x-a)(x-b)=0 \text{ folgt } x-a=0 \text{ u. } x-b=0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} ax+bx=cx \text{ folgt } x=0 \\ a(x-b)+c(x-b)=d(x-b) \text{ folgt } x-b=0. \end{cases}$$

Ist die linke Seite einer auf null gebrachten Gleichung ein Produkt, das x oder Ausdrücke in x als Faktoren enthält, so ist jeder dieser Faktoren gleich null zu setzen.

Kann eine Gleichung mit x oder einem Ausdruck, der x enthält, durchdividiert werden, so ist x, bezw. dieser Ausdruck, gleich null zu setzen.

c) Gleichungen mit zwei und mehr Unbekannten.

7. Aus $\begin{cases} ax + by = c \\ a_1 x + b_1 y = c_1, \end{cases}$ folgt

$$y = \frac{c - ax}{b},$$

$$y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}, \text{ daher}$$

I. $\dfrac{c - ax}{b} = \dfrac{c_1 - a_1 x}{b_1}$ (Gleichsetzungsmethode),

II. $ax + b \cdot \dfrac{c_1 - a_1 x}{b_1} = c$ (Einsetzungsmethode),

III.
$$\begin{array}{l} ab_1 x + bb_1 y = cb_1 \\ a_1 bx + bb_1 y = c_1 b \\ \hline x(ab_1 - a_1 b) = cb_1 - c_1 b \end{array}$$

$$x = \frac{cb_1 - c_1 b}{ab_1 - a_1 b}$$

(Kombinationsmethode),

IV.
$$\begin{array}{ll} 1) & ax + by = c \quad | \; m \\ 2) & a_1 x + b_1 y = c_1 \\ \hline 3) & (am + a_1)x + (bm + b_1)y = cm + c_1, \end{array}$$

setze $bm + b_1 = 0$, so ist $m = -\dfrac{b_1}{b}$,

dies in 3) eingesetzt giebt

$$\left(-\frac{ab_1}{b} + a_1\right)x = -\frac{cb_1}{b} + c_1, \text{ oder}$$

$$(-ab_1 + a_1 b)x = -cb_1 + c_1 b$$

$$x = \frac{cb_1 - c_1 b}{ab_1 - a_1 b};$$

ebenso wird y bestimmt.

(Methode der unbest. Koëfficienten von Bézout.)

8. Hat man drei Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$\left|\begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{array}\right|$$

so stellt man durch zweimalige Elimination derselben Unbekannten, z. B. von z, zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten und dann hieraus eine Gleichung mit einer Unbekannten her. — Bei vier Gleichungen mit vier Unbekannten eliminiert man dieselbe Unbekannte dreimal und erhält dadurch drei Gleichungen mit drei Unbekannten u. s. f.

9. Lösung durch Determinanten:

$$\begin{array}{l|l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & A_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & A_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & A_3 \\ \hline \end{array}$$

Durch Multiplikation mit den angeschriebenen Unterdeterminanten und Addition folgt:

$$(a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3)\, x = d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3, \text{ also}$$

$$x = \frac{d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3}{a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3}.$$

Der Nenner ist die Determinante Δ des Systems der linken Seiten. — Für y und z folgt ebenso:

$$y = \frac{d_1 B_1 + d_2 B_2 + d_3 B_3}{\Delta}$$

$$z = \frac{d_1 C_1 + d_2 C_2 + d_3 C_3}{\Delta}.$$

10. Die Bedingung für das gleichzeitige Bestehen von n homogenen Gleichungen, z. B. von

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \text{ ist} \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{array} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

§ 31. Gleichungen zweiten Grades und Exponentialgleichungen.

a) Mit einer Unbekannten.

1. $x^2 = a$
$x = \pm\sqrt{a}$

2. $\underline{\mathbf{x^2 + bx + c = 0}}$ (1. Normalform.)

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = -c + \frac{b^2}{4}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

3. $\underline{\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}}$ (2. Normalform.)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Die Gleichung liefert:

2 verschiedene reelle Werte
2 gleiche " "
2 verschiedene imag. "
je nachdem $b^2 - 4ac \gtreqless 0$.

$b^2 - 4ac$ heisst Diskriminante der Gleichung.

4. $\underline{\mathbf{(x-\alpha)(x-\beta) = 0}}$ (3. Normalform.)

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta. \end{cases}$$

Aus $\begin{cases} x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0 \\ x^2 + \quad bx \quad + c = 0 \end{cases}$ folgt $\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c. \end{cases}$

5. Die Gleichung

$x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$ hat die Wurzeln $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1}{a}$

$x - \frac{1}{x} = a - \frac{1}{a}$ " " " $x_1 = a$, $x_2 = -\frac{1}{a}$.

6. Gleichungen, die durch Einführung einer neuen Unbekannten oder durch Zerlegung auf quadratische zurückgeführt werden können:

1. $ax^4 + bx^2 + c = 0$, setze $x^2 = y$
2. $ax^6 + bx^3 + c = 0$, „ $x^3 = y$
3. $ax^{2m} + bx^m + c = 0$, „ $x^m = y$
4. $ax + b\sqrt{x} + c = 0$, „ $\sqrt{x} = y$
5. $a\sqrt[3]{x^8} + b\sqrt[3]{x^4} + c = 0$, „ $\sqrt[3]{x^4} = y$
6. $au^{2x} + bu^x + c = 0$, „ $u^x = y$ (§ 31c.)
7. $(x^2 + ax)^2 + b(x^2 + ax) + c = 0$, „ $x^2 + ax = y$
8. $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^2 + \frac{ax+b}{cx+d} + e = 0$, „ $\frac{ax+b}{cx+d} = y$.

7. Symmetrische Gleichungen:

1. $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$, $a(x^3+1) + bx(x+1) = 0$, zerfällt in I. $x + 1 = 0$ und II. $a(x^2 - x + 1) + bx = 0$.
2. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, Division mit x^2,
$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0;$$
setze $x + \frac{1}{x} = y$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.
3. $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$,
$$a(x^5 + 1) + bx(x^3 + 1) + cx^2(x + 1) = 0$$

Abspaltung von $x + 1 = 0$, Restgleichung symmetrisch vom vierten Grad.

b) Mit zwei Unbekannten.

Für die Auflösung quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten kann keine allgemeine, einfache Methode angegeben werden, da die Elimination einer der Unbekannten im allgemeinen auf eine Gleichung vierten Grades führt. Es ergiebt sich jedoch in vielen Fällen, in welchen die eine der Gleichungen oder beide nicht alle möglichen Glieder enthalten, die Schlussgleichung als quadratische oder sonst lösbare. In jedem einzelnen Fall ist nach Massgabe der Eigenschaften der vorliegenden Gleichungen zu verfahren. Die wichtigsten Fälle sind:

1. Die eine der beiden Gleichungen ist vom ersten Grad; man drücke eine Unbekannte aus und setze sie in die andere Gleichung ein.

2. Durch Elimination der quadratischen Glieder entsteht eine Gleichung ersten Grades.

3. Es lässt sich eine Vereinfachung durch Absonderung eines Faktors erzielen.

4. Die Einführung einer neuen Unbekannten in die eine Gleichung bewirkt, dass dieselbe nur noch diese Unbekannte enthält, oder es wird das ganze System durch Einführung neuer Unbekannten vereinfacht.

5. Durch Addition und Subtraktion, Multiplikation oder Division der beiden gegebenen Gleichungen, oder auch durch korrespondierende Addition und Subtraktion bei einer derselben, entsteht eine Gleichung, in der für $x + y$, $x - y$, xy oder $\frac{x}{y}$ oder einen sonstigen Ausdruck in x und y eine neue Unbekannte eingeführt werden kann.

6. Die Gleichung ist homogen; man dividiert mit y^2 durch und bestimmt $\frac{x}{y}$.

7. Es kommen ausser dem Absolutglied in jeder Gleichung nur quadratische Glieder vor; man eliminiert die Absolutglieder, so erhält man ein homogene Gleichung. Oder: Man bringt die quadratischen Glieder nach links, dividiert die eine Gleichung durch die andere, dividiert dann Zähler und Nenner durch y^2, setzt $\frac{x}{y} = t$ und bestimmt t.

8. Man kann z. B. aus $x^2 + y^2 = a$

$$2xy = b$$

durch Addition und Subtraktion der zweiten $(x + y)^2$ und $(x - y)^2$ bilden und hieraus $x + y$ und $x - y$ bestimmen.

c) Exponentialgleichungen (logarithmische Gleichungen).

1. Grundaufgabe:

$$a^x = b;$$

$$x \log a = \log b, \quad x = \frac{\log b}{\log a}.$$

2. Besondere Fälle:

1. $a^x = a^r; \quad x = r.$
2. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(\frac{b}{a}\right)^m; \quad x = -m.$
3. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{c}{d}; \quad x = \frac{\log c - \log d}{\log a - \log b}.$
4. $(ab)^{\frac{m+x}{nx}} = a \,.\, b^{\frac{n+x}{r+x}}.$
   Logarithmiere, sammle die Glieder mit x nach links, die ohne x nach rechts, und löse nach x auf.
5. $ab^x + c(d + b^{-x}) = e$; setze und bestimme zunächst $y = b^x$.
6. $a^{x+p} + a^{x+q} = b^{x+m} + b^{x+n};$

   $$a^x(a^p + a^q) = b^x(b^m + b^n)$$

   $$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{b^m + b^n}{a^p + a^q};$$ hieraus folgt x.
7. $x^r x^{\log x} = b;$
   $r \log x + \log x \,.\, \log x = \log b$, setze und bestimme $y = \log x$ u. s. f.
8. $\log(ax + b) + \log(cx + d) = m;$
   es ist $\log\big((ax + b)(cx + d)\big) = m$, also

   $$(ax + b)(cx + d) = 10^m$$

   woraus x folgt.

9. $a^x b^y = p$
$c^x d^y = q$;
logarithmiere und bestimme aus den erhaltenen Gleichungen $\log x$ und $\log y$.

§ 32. Diophantische Gleichungen ersten Grades.

a) Mit zwei Unbekannten.

1. Euler'sche Methode. (Absonderung der grössten Ganzen.) Beispiel:

$$61x + 7y = 1000$$

$$y = \frac{1000 - 61x}{7} = 143 - 9x + \frac{2x - 1}{7} \; (= u)$$

$$x = \frac{7u + 1}{2} = 3u + \frac{u + 1}{2} \; (= v)$$

$u = 2v - 1$, also

$$x = \frac{14v - 7 + 1}{2} = 7v - 3$$

$$y = \frac{1000 - 61(7v - 3)}{7} = 169 - 61v.$$

v	x	y
0	−3	169
1	4	108
2	11	47
3	18	−14

$\begin{cases} 4 \\ 108 \end{cases}$ $\begin{cases} 11 \\ 47 \end{cases}$ sind also die brauchbaren Werte für die Unbekannten.

2. Kettenbruchmethode von Lagrange:
Ist 1. $a x + b y = c$ gegeben, so setze man
2. $a_1 x + b_1 y = t$. dann folgt:

3. $$x = \frac{b_1 c - b t}{a b_1 - a_1 b},$$

$$y = \frac{a t - a_1 c}{a b_1 - a_1 b},$$

x und y sind dann ganze Zahlen, wenn $a b_1 - a_1 b = \pm 1$. Dies ist der Fall, wenn $\frac{a_1}{b_1}$ vorletzter Näherungswert des in einen Kettenbruch verwandelten Bruches $\frac{a}{b}$ ist (s. § 17_4).

Beispiel: 1. $61x + 7y = 1000$

Näherungswerte des in einen Kettenbruch verwandelten Bruches $\frac{7}{61}$ sind: $\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{3}{26}, \frac{7}{61}$, also

2. $26x + 3y = t$

3. $x = 3000 - 7t = 7(429 - t) - 3$
$= \mathbf{7v - 3}$

4. $y = \frac{t - 26x}{3} = \frac{429 - v - 182v + 78}{3}$
$= \mathbf{169 - 61v}$.

v	0	1	2	3
x	−3	4	11	18
y	169	108	47	−14

Res.: $\begin{cases} 4 \\ 108 \end{cases}, \begin{cases} 11 \\ 47 \end{cases}$.

b) Mit drei Unbekannten.

3. Man eliminiere aus den zwei gegebenen Gleichungen eine der drei Unbekannten, z. B. z, dann löse man die erhaltene Gleichung nach a) auf und berechne z vermittelst der erhaltenen Werte von x und y aus einer der gegebenen Gleichungen.

§ 33. Allgemeine Sätze über höhere Gleichungen.

1. Hat $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ die Wurzel $x = \alpha$, so ist $f(x)$ durch $x - \alpha$ ohne Rest teilbar.

2. Eine Gleichung nten Grades hat n, aber auch nur n Wurzeln.

3. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$, so ist

$$\mathbf{f(x)=a_0\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)} \text{ und}$$

4. Symmmetrische Funktionen:

$$\frac{a_1}{a_0} = -\Sigma K_1(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = -(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n);$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \Sigma K_2(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n;$$

$$\frac{a_3}{a_0} = -\Sigma K_3(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \dots + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n.$$

. . . .

$$\frac{a_n}{a_0} = (-1)^n.\, \alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \dots \alpha_n.$$

5. Eine Gleichung hat höchstens soviel reelle positive Wurzeln als Zeichenwechsel und höchstens soviel reelle negative Wurzeln als Zeichenfolgen (die fehlenden Glieder sind mit ± 0 zu ergänzen).

6. Ist $p + qi$ eine Wurzel einer Gleichung mit reellen Koeffizienten, so ist auch $p - qi$ eine Wurzel. Die Gleichung hat, wenn sie imaginäre Wurzeln hat, stets eine gerade Anzahl derselben. Eine Gleichung von ungeradem Grad hat daher zum wenigsten eine reelle Wurzel.

7. Wird $f(x)$ für $x=p$ negativ und für $x=q$ positiv, so liegt mindestens eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ zwischen p und q.

8. Sind die Koeffizienten der r niedersten Potenzen von x (x^0 eingeschlossen) gleich null, so hat die Glei-

chung r mal die Wurzel null; sind die der r höchsten Potenzen 0, so hat sie r mal die Wurzel ∞.

9. Ist α eine Wurzel der Gleichung 1., so ergiebt sich aus derselben durch Division mit $x-\alpha$ die Gleichung $n-1$ ten Grades

$$\frac{f(x)}{x-\alpha} = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \ldots + b_{n-2} x + b_{n-1} = 0,$$

dann ist $\qquad b_r = b_{r-1} \cdot \alpha + a_r.$

Beispiel $3x^5 - 7x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 7x - 2 = 0$ soll durch $x-2$ dividiert werden.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 3 & -7 & +2 & +4 & -7 & -2 \\ \hline 2 & 3 & -1 & 0 & 4 & +1 & 0 \end{array}$$

Res.: $3x^4 - x^3 + 4x + 1 = 0.$

Durch diese Division wird festgestellt, ob $x = 2 (= \alpha)$ eine Wurzel der ursprünglichen Gleichung ist.

Um die ganzen rationalen Wurzeln einer Gleichung aufzufinden, zerlege man a_n in Faktoren $p_1, p_2 \ldots$ und versuche, ob $x - p_1$, $x - p_2 \ldots$ ohne Rest in die Gleichung aufgeht. s. auch § $37_{a,\,1}$.

10. W u r z e l v e r k l e i n e r u n g. Soll die Gleichung

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

in die Gleichung

$$\varphi(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

umgewandelt werden, so dass die Wurzeln der letzteren Gleichung um k kleiner sind als die der gegebenen, so muss $f(x) = \varphi(x-k)$, also

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = p_0 (x-k)^n + p_1 (x-k)^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(x-k) + p_n$$

sein und es sind daher $p_n, p_{n-1}, \ldots p_0$ die Reste, die sich ergeben, wenn man $f(x)$ fortlaufend mit $x-k$ dividiert.

Beispiel: $x^4 - 4x^3 - 39x^2 + 46x + 80 = 0$

$$\begin{array}{llllll}
4) & 1 & 0 & -39 & -110 & -\mathbf{360} = \mathbf{p_n} \\
4) & 1 & 4 & -23 & -\mathbf{202} = \mathbf{p_{n-1}} & \\
4) & 1 & 8 & +\mathbf{9} = \mathbf{p_{n-2}} & & \\
4) & 1 & \mathbf{12} = \mathbf{p_1} & & & \\
4) & \mathbf{1} = \mathbf{p_0} & & & &
\end{array}$$

die gesuchte Gleichung ist:

$$x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 202x - 360 = 0.$$

11. Wurzelreduktion (= Transformation). Soll die Gleichung $f(x) = 0$ so umgeformt werden, dass das zweite Glied der neuen Gleichung 0 ist, so ist, da $p_1 = a_1 + n k a_0 = 0$,

$$k = -\frac{a_1}{n a_0}.$$

Beispiel: $x^3 - 18x^2 + 105x - 196 = 0$; $k = -\frac{-18}{3} = +6$;

$$\begin{array}{lllll}
6) & 1 & -12 & +33 & +\mathbf{2} \\
6) & 1 & -6 & -\mathbf{3} & \\
6) & 1 & \mathbf{0} & &
\end{array}$$

$y = x - 6$;

Res.: $y^3 - 3y + 2 = 0$.

§ 34. Binomische Gleichungen.

1. $x^n = +1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$;

$$x = \sqrt[n]{+1} = (+1)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}.$$

wobei k alle ganzen Werte von 0 bis n erhält.

2. $x^n = -1 = \cos(2k+1)\pi + i \sin(2k+1)\pi$;

$$x = \sqrt[n]{-1} = \cos\frac{2k+1}{n}\pi + i \sin\frac{2k+1}{n}\pi.$$

3. Beispiele.

1. $\mathbf{x^3 = 1}$;

$$\begin{array}{ll} \text{mit } k = 0 \ldots\ldots\ldots & \left\{ \begin{array}{l} x = 1, \end{array} \right. \\ \text{mit } k = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right. \ldots\ldots & \left\{ x = \cos 120^0 \pm i \sin 120^0 = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right. \\ & \qquad = \left\{ \begin{array}{l} \alpha \\ \beta. \end{array} \right. \end{array}$$

2. $\mathbf{x^3 = -1}$;

$$\begin{array}{ll} \text{mit } k = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 2 \end{array} \right. \ldots\ldots & \left\{ \begin{array}{l} x = \cos 60^0 \pm i \sin 60^0 = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} -\beta \\ -\alpha, \end{array} \right. \\ x = -1. \end{array} \right. \\ \text{mit } k = 1 \ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

3. $\mathbf{x^4 = 1}$;

$$\begin{array}{ll} \text{mit } k = 0 \ldots\ldots\ldots & x = 1, \\ \text{mit } k = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \right. \ldots\ldots & x = \cos 90 \pm i \sin 90 = \pm i, \\ \text{mit } k = 2 \ldots\ldots\ldots & x = -1. \end{array}$$

4. $\mathbf{x^4 = -1}$;

$$\begin{array}{ll} \text{mit } k = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 3 \end{array} \right. \ldots\ldots & x = \cos 45^0 \pm i \sin 45^0. \\ \text{mit } k = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right. \ldots\ldots & x = \cos 135^0 \pm i \sin 135^0. \end{array}$$

5. $\mathbf{x^5 = 1}$;

$$\begin{array}{ll} \text{mit } k = 0 \ldots\ldots\ldots & x = 1, \\ \text{mit } k = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 4 \end{array} \right. \ldots\ldots & x = \cos 72^0 \pm i \sin 72^0, \\ \text{mit } k = \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right. \ldots\ldots & x = \cos 144^0 \pm i \sin 144^0. \end{array}$$

6. $\mathbf{x^5 = -1}$;

$$\begin{array}{ll} \text{mit } k = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 4 \end{array} \right. \ldots\ldots & x = \cos 36^0 \pm i \sin 36^0, \\ \text{mit } k = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \right. \ldots\ldots & x = \cos 108^0 \pm i \sin 108^0, \\ \text{mit } k = 2 \ldots\ldots\ldots & x = -1. \end{array}$$

4. $\mathbf{x^n = a}$ | $x^n = -a$

$$x = \left(\sqrt[n]{a}\right) \cdot \sqrt[n]{+1} \qquad\Big|\qquad x = \left(\sqrt[n]{a}\right) \cdot \sqrt[n]{-1}$$

wobei $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ den absoluten, reellen Wert von $\sqrt[n]{a}$ bedeuted, welchen man durch direkte Wurzelausziehung oder logarithmische Berechnung erhält, während $\sqrt[n]{+1}$ und $\sqrt[n]{-1}$ jeden der durch 1. und 2. bestimmten Werte darstellen.

§ 35. Kubische Gleichungen.

1. $\mathbf{x^3 - a = 0}$ | $\mathbf{x^3 + a = 0}$

$$x = \sqrt[3]{a} = \begin{cases} \left(\sqrt[3]{a}\right) \\ \left(\sqrt[3]{a}\right) \cdot \alpha \\ \left(\sqrt[3]{a}\right) \cdot \beta \end{cases} \qquad\Big|\qquad x = \sqrt[3]{-a} = \begin{cases} -\left(\sqrt[3]{a}\right) \\ -\left(\sqrt[3]{a}\right) \cdot \alpha \\ -\left(\sqrt[3]{a}\right) \cdot \beta \end{cases}$$

s. § 34, $3_{1,2}$.

2. $$x^3 + a x^2 + b x + c = 0$$

Transformiere die Gleichung (durch Wurzelverkleinerung um $\frac{a}{3}$ oder Subtsitution von $y = x - \frac{a}{3}$, s. § 33_{10}) auf die Form

$$\mathbf{y^3 + 3 p y + 2 q = 0}$$

und setze $y = u + v$ und $u^3 + v^3 + 2q = 0$,

dann ist
$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} \\ v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = u + v \\ y_2 = -\dfrac{u+v}{2} + \dfrac{i}{2}\sqrt{3}\,(u - v) \\ y_3 = -\dfrac{u+v}{2} - \dfrac{i}{2}\sqrt{3}\,(u - v) \end{cases}$$

(Cardan'schen Formeln)

Die Cardanschen Formeln führen zu einer Lösung nur so lange $q^2 + p^3 > 0$; sie liefern dann 1 reelle und 2 imaginäre Wurzeln.

3. Fall der 3 reellen Wurzeln (casus irreducibilis). Ist $q^2 + p^3 < 0$, so hat die Gleichung 3 reelle Wurzeln, aber diese können nicht mit den genannten Formeln bestimmt werden; dann

$$\left\{\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{-q}{\sqrt{-p^3}} \\ y_1 &= 2\sqrt{-p}\,.\cos\frac{\varphi}{3} \\ y_2 &= -2\sqrt{-p}\,.\cos\left(\frac{\varphi}{3}+60^0\right) \\ y_3 &= -2\sqrt{-p}\,.\cos\left(\frac{\varphi}{3}-60^0\right). \end{aligned}\right.$$

4. Trigonometrische Auflösung für Fall 2: $q^2 + p^3 > 0$.

1. $p > 0$

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{\sqrt{p^3}}{q}\,;\ \sqrt[3]{\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}} = \operatorname{tg}\psi \\ y_1 &= \mp 2\sqrt{p}\,.\operatorname{ctg} 2\psi \\ y_2 &= \pm\sqrt{p}\left(\operatorname{ctg} 2\psi + \frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi}\right) \\ y_3 &= \pm\sqrt{p}\left(\operatorname{ctg} 2\psi - \frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi}\right); \end{aligned}\right.$$

hiebei sind die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen, je nachdem $q \gtrless 0$.

2. $p < 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\varphi = \dfrac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{+q}; \quad \mathrm{tg}\sqrt[3]{\dfrac{\varphi}{2}} = \mathrm{tg}\,\psi \\ y_1 = \mp 2\sqrt{-p}\cdot\dfrac{1}{\sin 2\psi} \\ y_2 = \pm\sqrt{-p}\left(\dfrac{1}{\sin 2\psi} + i\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,2\psi\right) \\ y_3 = \pm\sqrt{-p}\left(\dfrac{1}{\sin 2\psi} - i\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,2\psi\right). \end{array}\right.$$

Zeichen wie oben bei 1. zu nehmen.

§ 36. Biquadratische Gleichungen.

1. Besondere Fälle s. § 31, $6_1, 7_2$.

2. Methode der Zerlegung. Man reduziere die gegebene Gleichung auf die Form:

$$x^4 + a x^2 + b x + c = 0 \text{ und setze}$$

$$x^4 + a x^2 + b x + c = (x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1);$$

hieraus durch Koeffizientenvergleichung

$$1. \left\{\begin{array}{l} \alpha = -\alpha_1 \\ \beta + \beta_1 - \alpha^2 = a \\ \alpha(\beta_1 - \beta) = b \\ \beta\beta_1 = c \end{array}\right.$$

Durch Elimination von β und β_1 ergiebt sich:

2. $\alpha^6 + 2a\alpha^4 + (a^2 - 4c)\alpha^2 - b^2 = 0$
3. Transformation und Lösung dieser (nach α^2) kubischen Resolvente. (Ein Wert von α genügt; die andern liefern die x nur in anderer Reihenfolge.)
4. Berechnung von β und β_1 aus 1.
5. Lösung der Gleichungen: $\left\{\begin{array}{l} x^2 + \alpha x + \beta = 0 \\ x^2 - \alpha x + \beta_1 = 0 \end{array}\right.$

3. Euler'sche Methode.

1. Transformierung der Gleichung auf die Form

$$x^4 + a x^2 + b x + c = 0$$

2. Bildung der Resolvente

$$y^3 + \frac{a}{2} y^2 + \frac{a^2 - 4c}{16} y - \frac{b^2}{64} = 0$$

Sind die Wurzeln dieser Gleichung y_1, y_2, y_3, dann ist

$$\begin{cases} x_1 = \pm(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}) \\ x_2 = \pm(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}) \\ x_3 = \pm(-\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}) \\ x_4 = \pm(-\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}), \end{cases}$$

wobei die Vorzeichen so zu wählen sind, dass

$$\sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2} \cdot \sqrt{y_3} = -\frac{b}{8}$$

§ 37a. Höhere Numerische Gleichungen. — Näherungsmethoden.

1. Rationale Wurzeln, Zerlegung des Absolutgliedes. — Man bestimmt alle Faktoren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots .$ des Absolutgliedes und stellt durch Einsetzung derselben in die gegebene Gleichung fest, ob sie derselben genügen.

Ist die Zahl der Faktoren eine sehr grosse, so stellt man mit der Substitution $x = y + 1$ eine neue Gleichung her und bestimmt wiederum die Faktoren des Absolutgliedes. Es können dann nur diejenigen Faktoren des Absolutgliedes der gegebenen Gleichung Wurzeln derselben sein, welche um 1 grösser sind als die entsprechenden Faktoren der zweiten Gleichung.

2. Newtons Methode. Hat man durch Versuche (oder durch Aufzeichnung der Kurve) gefunden, dass α annähernd eine Wurzel der Gleichung

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0$$

ist, so ist an α noch eine Korrektion anzubringen, um den wirklichen Wert zu erhalten. Die erste Korrektion p ergiebt sich aus (Taylors Satz s. § 95)

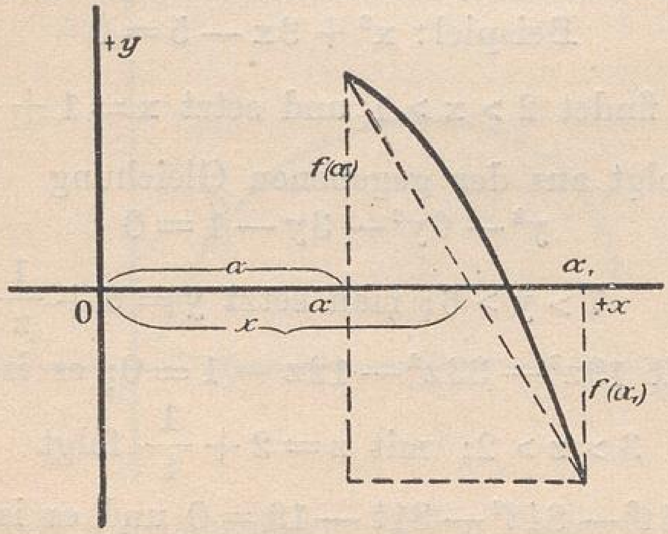
$$p = \frac{-(a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n)}{n a_0 \alpha^{n-1} + (n-1) a_1 \alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-1}} = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Setzt man nun $\alpha + p$ an Stelle von α, so erhält hiemit aus der angegebenen Beziehung eine weitere Korrektion p_1 u. s. f.

3. Regula falsi (indische Methode). Hat die Gleichung $f(x) = 0$ eine Wurzel zwischen α und α_1 ($f(\alpha)$ und $f(\alpha_1)$ haben also entgegengesetzte Vorzeichen), so erhält man einen angenäherten Wert für die Wurzel, wenn man an Stelle des Schnittpunktes der Kurve mit der X achse, den der Sehne setzt, welche die zu den Abscissen α und α_1 gehörigen Kurvenpunkte verbindet; man hat dann:

$$\frac{x-\alpha}{f(\alpha)} = \frac{x-\alpha_1}{f(\alpha_1)}, \text{ somit}$$

$$x = \alpha + \frac{(\alpha_1 - \alpha) f(\alpha)}{f(\alpha) - f(\alpha_1)}.$$



Mit dem neuen Wert und einem benachbarten, kann das Verfahren wiederholt werden u. s. f. — Dieses Verfahren ist insbesondere bei transcendenten Gleichungen anwendbar. Beispiel:

$$x^x = 100, \text{ also}$$

$$x \log x = 2 \text{ oder } x \log x - 2 = 0.$$

Ausrechnung:

x	f(x) = x log x — 2
1	— 2
2	— 1,4
3	— 0,5687
4	+ 0,4084

$$x = 3 + \frac{1 \,.\, 0{,}57}{0{,}98} = 3{,}58$$

3,58	+ 0,0171
3,60	— 0,0027

$$x = 3{,}58 + \frac{0{,}02 \,.\, 0{,}0171}{0{,}0198}$$

$$= 3{,}58 + 0{,}01727 = 3{,}59727 \text{ u. s. f.}$$

(die richtige Wurzel liegt zwischen 3,59728 und 3,59729).

4) Kettenbruchmethode von Lagrange.

Beispiel: $x^3 + 3x - 5 = 0$

Man findet $2 > x > 1$ und setzt $x = 1 + \frac{1}{y}$;

hiermit folgt aus der gegebenen Gleichung

$$y^3 - 6y^2 - 3y - 1 = 0$$

nun ist $7 > y > 6$; man setzt $y = 6 + \frac{1}{z}$

und erhält $19z^3 - 33z^2 - 12z - 1 = 0$; es ist

$3 > z > 2$; mit $z = 2 + \frac{1}{t}$ folgt

$5t^3 - 84t^2 - 81t - 19 = 0$ und es ist

$18 > t > 17$ u. s. f.

Es ist nun: $x = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{17 + \ldots}}} = 1,15416$

oder $x = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{18}}} = 1,15418.$

§ 37b. Grösste und kleinste Werte.

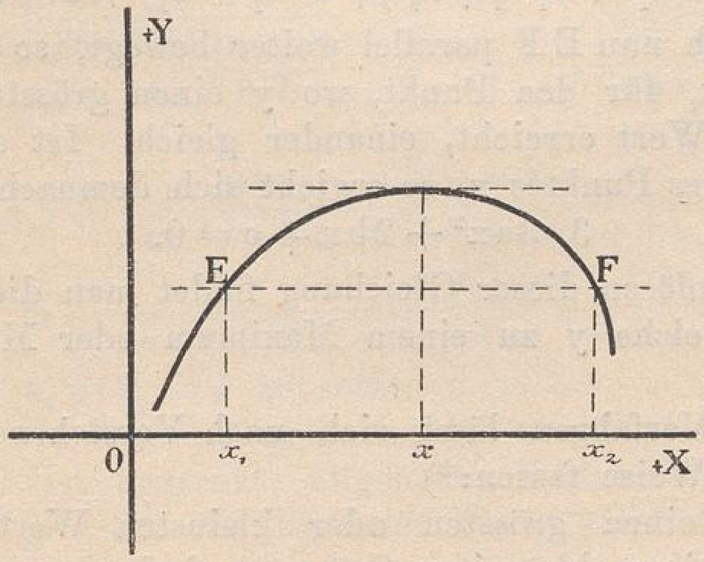
(Elementare Behandlung.)

Ist y eine Funktion von x, also eine von x abhängige Grösse, und z. B.

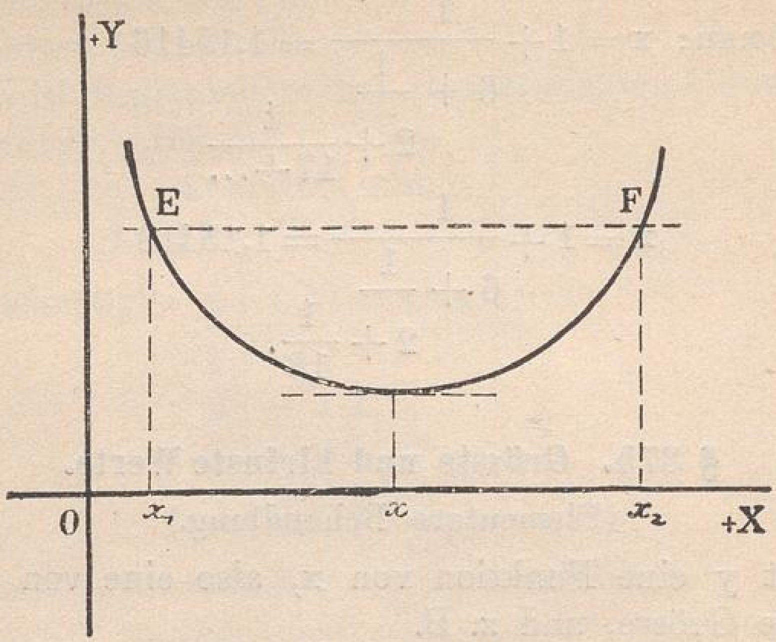
$$1.\quad y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

so können hiebei die verschiedenen Werte von x als Abscissen, die von y als Ordinaten einer Kurve betrachtet werden.

Zieht man eine Parallele E F zur X axe, welche die



betreffende Funktionskurve in den Punkten E, F, deren Abscissen x_1 und x_2 sind, schneidet, so hat y in diesen



Punkten E und F die gleichen Werte, es ist also für obiges Beispiel 1.
$ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d$, woraus $a(x_1^3 - x_2^3) + b(x_1^2 - x_2^2) + c(x_1 - x_2) = 0$, folglich nach Division mit $x_1 - x_2$.

$$2.\ a(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + b(x_1 + x_2) + c = 0.$$

Wenn sich nun E F parallel weiter bewegt, so werden x_1 und x_2 für den Punkt, wo y einen grössten oder kleinsten Wert erreicht, einander gleich. Ist die Abscisse dieses Punktes x, so ergiebt sich demnach aus 2.

$$3.\ 3ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung findet man die Werte von x, welche y zu einem Maximum oder Minimum machen.

Das Verfahren lässt sich nach Vorstehendem in folgender Weise fassen:*)

Um einen grössten oder kleinsten Wert (oder mehrere) einer abhängigen Grösse zu finden, muss man:

*) Vergl. hiezu: Martus, Maxima und Minima, Berlin 1861.

1. Die Funktion in einer unabhängigen veränderlichen Grösse x ausdrücken;

2. in diesen Ausdruck x_1 und dann x_2 einsetzen und die sich ergebenden Ausdrücke einander gleich setzen;

3. die gleich hohen Glieder zusammenfassen, so dass sich mit dem Faktor $x_1 - x_2$ durchdividieren lässt;

4. nachdem mit $x_1 - x_2$ durchdividiert ist, hat man in der hiedurch erhaltenen Gleichung $x_1 = x_2 = x$ zu setzen und die Gleichung aufzulösen. Für die gefundenen Werte von x erreicht y ein Maximum oder Minimum.

5. Ob ein grösster oder kleinster Wert vorliegt, ergiebt sich aus der Natur der Aufgabe oder durch Berechnung der Werte von y für solche Werte von x, die dem gefundenen benachbart sind.

Bemerkungen: 1. Bei Funktionen, in denen eine Quadratwurzel vorkommt, muss vor dem Dividieren mit $x_1 - x_2$ in der Regel noch umgeformt werden.

Beispiel:

$$mx_1 + n + \sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} = mx_2 + n + \sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c},$$

$$m(x_1 - x_2) + \sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} - \sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c} = 0,$$

woraus

$$m(x_1 - x_2) + \frac{a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2)}{\sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} + \sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c}} = 0,$$

folglich $$m + \frac{a(x_1 + x_2) + b}{\sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} + \sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c}} = 0.$$

Nun ist $x_1 = x_2 = x$ zu setzen u. s. f.

2) Das Anwendungsgebiet der obigen, elementaren Methode ist begrenzt; allgemeine Verfahren für Auffindung grösster und kleinster Werte giebt die höhere Analysis (s. § 97).
