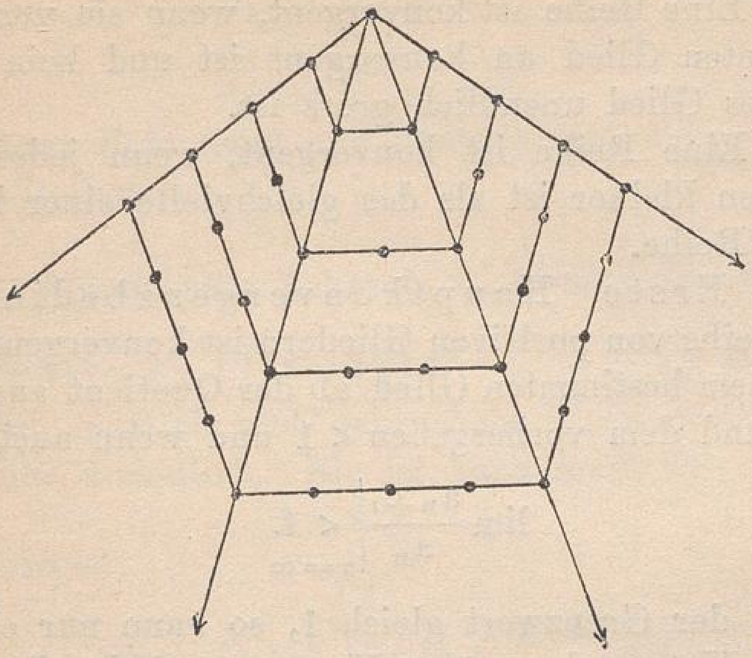
Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

B. Unendliche Reihen.



b) Pyramidalzahlen.

dreieckige: 1 4 10 20 35 ...., $\binom{n+1}{2} + 1 . \binom{n+1}{3}$

$= \binom{n+2}{3}$,

viereckige; 1 5 14 30 55 ...., $\binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$,

fünfeckige: 1 6 18 40 75 ...., $\binom{n+1}{2} + 3\binom{n+1}{3}$.

B. Unendliche Reihen.

§ 26. Konvergenzbedingungen.

1. Eine Reihe $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots. + a_n$ heisst konvergent, wenn die Grenze von s_n bei unbegrenzt wachsendem n eine endliche Zahl ist.

2. die abnehmende geometrische Reihe ist konvergent, also $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots..$ ist konv., wenn der absolute Betrag von $x < 1$.

3. Eine Reihe ist konvergent, wenn sie von einem bestimmten Glied an konvergent ist und kein vorangehendes Glied unendlich gross ist.

4. Eine Reihe ist konvergent, wenn jedes Glied derselben kleiner ist als das gleichvielte einer konvergenten Reihe.

5. Erste Hauptkonvergenzbedingung: Eine Reihe von positiven Gliedern ist konvergent, wenn von einem bestimmten Glied ab der Quotient aus einem Glied und dem vorhergehen < 1 und wenn auch

$$\lim \left.\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|_{n=\infty} < 1.$$

Ist der Grenzwert gleich 1, so kann nur eine besondere Untersuchung über Konvergenz oder Divergenz entscheiden.

6. Zweite Hauptkonvergenzbedingung: Eine Reihe mit abwechselnden Zeichen konvergiert, wenn die Glieder von einer bestimmten Stelle an abnehmen und $\lim a_n = 0$

(Bei einer Reihe mit gleichen Zeichen ist diese Bedingung notwendig, aber nicht hinreichend.)

7. Jede Reihe mit negativen oder abwechselnden Gliedern ist konvergent, wenn sie konvergiert, falls man alle Glieder positiv setzt.

8. Eine Reihe heisst divergent, wenn $\lim s_n$ nicht endlich ist. Dies ist der Fall, wenn $\lim a_n$ nicht 0 ist.

§ 27. Satz von der Koeffizientenvergleichung.

Ist

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots$$

und sind beide Reihen konvergent, so ist

$$A_0 = B_0$$
$$A_1 = B_1$$
$$A_2 = B_2 \text{ u. s. f.}$$

Dieser Satz dient zur Entwickelung von Funktionen in Reihen.

§ 28. Binomischer Lehrsatz — Newtonsche Reihe.

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{r}x^r + \ldots$$

Für negative und gebrochene Werte von n wird die Reihe unendlich. Sie ist konvergent für

$$1 > x > -1.$$

Beispiel:

$$\sqrt{a^2+b^2} = a\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = a\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2}+\binom{\frac{1}{2}}{2}\frac{b^4}{a^4}+\ldots\right)$$

Ist b gegen a sehr klein, dann ist

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a} \quad \text{(Näherungsformel.)}$$

$$\sqrt[3]{a^3 \pm b} = a \pm \frac{b}{3a^2} \quad \text{"}$$

§ 29. Exponentialreihe, logarithmische, trigonometrische und cyklometrische Reihen.

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n_{n=\infty}$$
$$= 2{,}7182818284\ldots.$$

2. $a^x = e^{x\,la} = 1 + \frac{x\,la}{1!} + \frac{(x\,la)^2}{2!} + \frac{(x\,la)^3}{3!} + \ldots$

3. $l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots, \; 1 \geq x > -1$

4. $l(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots 1 > x > -1$

5. $$\begin{cases} l\frac{1+x}{1-x} = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right\} 1 > x > -1 \text{ oder} \\ l\,z = 2\left\{\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\right\} \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} l(a+h) - l\,a = 2\left\{\frac{h}{2a+h} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{h}{2a+h}\right)^3 + \ldots\right\} \\ \log(a+h) = \log a + 2M\left\{\frac{h}{2a+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2a+h}\right)^3 + \ldots\right\} \end{cases}$$

7. Uebergang vom natürlichen zum Briggschen System:

$$10^{\overset{10}{\log} z} = z$$

$$\overset{10}{\log} z \,.\, l\,10 = l\,z$$

$$\mathbf{\overset{10}{\log}\, z = \frac{\mathit{l}\,z}{\mathit{l}\,10} = M_{10} \,.\, \mathit{l}\,z}$$

M_{10} = Modulus des Briggschen Systems $= \frac{1}{l\,10}$
$= 0{,}4342945 \ldots$ (s. auch § 16_8).

---

8. $$\begin{cases} \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots \quad x = \operatorname{arc} x^0 \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \end{cases}$$

9. $\cos x + i \sin x = e^{ix}$

$\cos x - i \sin x = e^{-ix}$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

10. $e^{\varphi} = e^{\varphi + 2k\pi i}$; $e^{2k\pi i} = 1$, $e^{(2k+1)\pi i} = -1$

11. Ist $y = e^x = e^{x + 2k\pi i}$, so ist

$$ly = x + 2k\pi i.$$

$$l(-1) = (2k+1)\pi i; \quad l(-y) = ly + (2k+1)\pi i.$$

Ist $y + iz = re^{\varphi i}$, so ist

$$l(y + iz) = lr + (\varphi + 2k\pi) i.$$

12. $$\begin{cases} \operatorname{arc\,sin} x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots \\ \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad 1 \geqq x \geqq -1 \\ \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \end{cases}$$

(Leibnizsche Reihe.)

Zur Berechnung von π kann folgende Formel benützt werden:

$$\begin{cases} \pi = 6 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{12}\left\{1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \ldots\right\} \\ \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8} \\ \frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7}. \end{cases}$$

III. Abschnitt.

Gleichungen.

§. 30. Gleichungen ersten Grades.

a) Umformungs- und Versetzungsregeln:

1. Jede Gleichung bleibt richtig, wenn auf jeder Seite dieselbe Operation mit derselben Zahl vorgenommen wird.