Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

A. Endliche Reihen.

$r > n$; ist aber n gebrochen oder negativ, so wird $\binom{n}{r}$ für keinen Wert von r Null.

$$\binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{n} = 1; \quad \binom{n}{0} = 1.$$

3. $$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}.$$

4. $$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}.$$

5. $$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \binom{n-2}{r} + \ldots + \binom{r}{r}.$$

6. $$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{r}\binom{n}{o} + \binom{m}{r-1}\binom{n}{1} + \binom{m}{r-2}\binom{n}{2} + \ldots + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{m}{o}\binom{n}{r}.$$

II. Abschnitt.

Reihen.

A. Endliche Reihen.

§ 22. Arithmetische Reihen erster Ordnung.

Reihe: $a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots a+(n-1)d.$

1. $z = a + (n-1)d.$

2. $$s = \frac{(a+z)\,.\,n}{2} = \frac{(2a + (n-1)d)\,.\,n}{2}.$$

§ 23. Geometrische Reihen.

Reihe: $a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3 \ldots aq^{n-1}.$

1. $z = aq^{n-1}.$

2. $$s = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} = \frac{qz - a}{q-1}.$$

3. Ist $n = \infty$ und $0 < q < 1$, dann ist $s = \frac{a}{1-q}$.

4. $$\left.\begin{array}{l} 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots = \dfrac{1}{1-x} \\ 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots = \dfrac{1}{1+x} \end{array}\right\} 0 < x < 1.$$

§ 24. Zinseszins- und Rentenrechnung.

Zinsfuss p %, Zinsfaktor q $\left(= 1 + \frac{p}{100}\right)$, ursprüngliches Kapital a, angewachsenes b, Zahl der Zinsperioden (Jahre) n, Rente r.

1. $b = a q^n$ (Zinseszinsformel).

2. $b = a q^n \pm \frac{r(q^n - 1)}{q-1}$ (erste Rentenformel).

3. $b = \frac{r(q^n - 1)}{q-1}$ (zweite Rentenformel).

4. $b = \frac{r q (q^n - 1)}{q-1}$ (dritte Rentenformel).

5. $a = r \cdot \frac{q^n - 1}{(q-1) \cdot q^n} = \frac{r}{q-1}\left(1 - \frac{1}{q^n}\right)$.

5'. $a = \frac{r}{q-1}$ $(n = \infty)$.

6. $b q^n = b \frac{p_1}{100} \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$.

1. Giebt den Endwert an, auf den das Kapital a in n Jahren durch Zinseszins anwächst.

2. Giebt den Endwert an, den a durch Zinseszins erreicht, wenn dasselbe am Ende jedes Jahres noch um r vermehrt oder vermindert wird; wird a in n Jahren aufgezehrt, so ist $b = 0$.

3. Giebt die Summe an, welche bis zum Ende des

nten Jahres erreicht ist, durch eine am Ende jedes Jahres erfolgende Zahlung r.

4. Stellt denselben Wert dar wie 3, wofern die Zahlung r am Jahresanfang geleistet wird.

5. a ist das Ablösungskapital (Mise) einer n mal am Jahresende wiederkehrenden Rente.

5'. a Ablösungskapital einer immerwährenden Rente.

6. Amortisation. Die Gleichung giebt die Bedingung an, unter der ein Kapital b in n Jahren durch Verzinsung mit p_1 % getilgt werden kann, wenn der Zinsfaktor (bei dem üblichen Zinsfuss p) q ist.

§ 25. Arithmetische Reihen höherer Ordnung.

1. Reihe: $y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4 \ldots y_n$

erste Differenzenreihe: $\Delta y_0 \quad \Delta y_1 \quad \Delta y_2 \quad \Delta y_3 \ldots$

zweite " $\Delta^2 y_0 \quad \Delta^2 y_1 \quad \Delta^2 y_2 \ldots$

dritte " $\Delta^3 y_0 \quad \Delta^3 y_1 \ldots$

$$\Delta^{r+1} y_m = \Delta^r y_{m+1} - \Delta^r y_m.$$

Ist die rte Differenzenreihe konstant, so ist die Reihe von der rten Ordnung.

$$2.\ y_n = y_0 + \binom{n}{1} \Delta y_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 y_0 + \binom{n}{3} \Delta^3 y_0 + \ldots + \binom{n}{r} \Delta^r y_0.$$

Sätze: 1. Das Glied y_n einer Reihe rter Ordnung ist eine ganze Funktion rten Grades von n.

2. Ist $y_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 \ldots + a_r n^r$ also eine ganze Funktion rten Grades von n, so ist die Reihe, welche man erhält, indem man $n = 0, 1, 2 \ldots$ setzt, von rter Ordnung.

Wenn die Reihe mit y_1 anfängt, dann ist:

$$y_n = y_1 + \binom{n-1}{1}\Delta y_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 y_1 + \binom{n-1}{3}\Delta^3 y_1 + \ldots + \binom{n-1}{r}\Delta^r y_1.$$

3. $$\mathbf{s_n} = \binom{\mathbf{n+1}}{\mathbf{1}}\mathbf{y_0} + \binom{\mathbf{n+1}}{\mathbf{2}}\Delta \mathbf{y_0} + \binom{\mathbf{n+1}}{\mathbf{3}}\Delta^2 \mathbf{y_0} + \ldots + \binom{\mathbf{n+1}}{\mathbf{r+1}}\Delta^r \mathbf{y_0}$$

oder bei der zweiten Bezeichnung:

$$s_n = \binom{n}{1}y_1 + \binom{n}{2}\Delta y_1 + \binom{n}{3}\Delta^2 y_1 + \ldots + \binom{n}{r+1}\Delta^r y_1.$$

4. $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}(2n+1)(n+1).n;$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2.n^2.$$

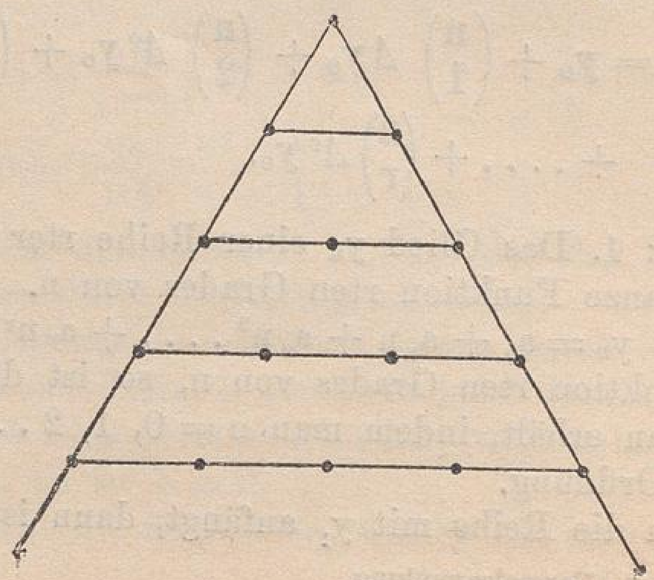
5. Figurierte Zahlen.

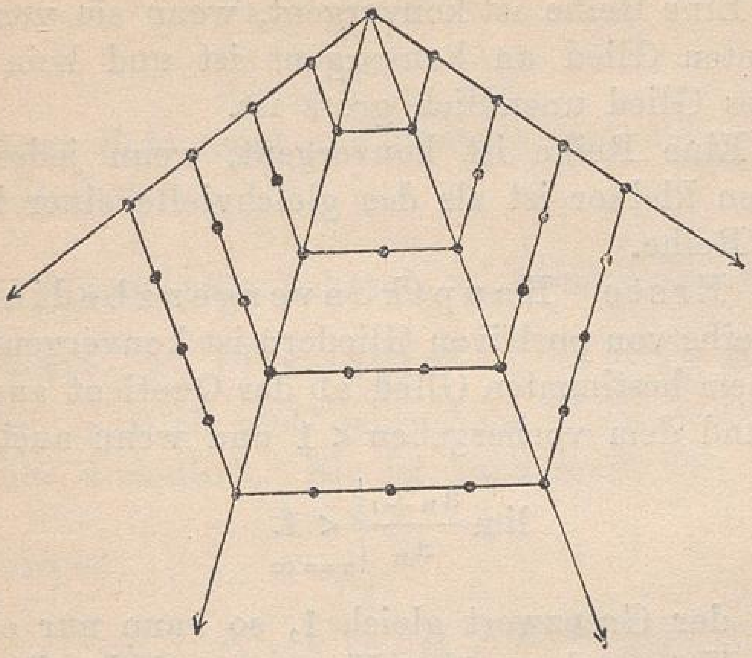
a. Polygonalzahlen:

Dreieckszahlen: 1 3 6 10 15 21 ...., $\binom{n+1}{2}$.

Viereckszahlen: 1 4 9 16 25 ...., n^2,

Fünfeckszahlen: 1 5 12 22 35 ...., $\frac{3n^2 - n}{2}$.





b) Pyramidalzahlen.

dreieckige: 1 4 10 20 35 ...., $\binom{n+1}{2} + 1 \cdot \binom{n+1}{3}$
$= \binom{n+2}{3}$,

viereckige; 1 5 14 30 55 ...., $\binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$,

fünfeckige: 1 6 18 40 75 ...., $\binom{n+1}{2} + 3\binom{n+1}{3}$.

B. Unendliche Reihen.

§ 26. Konvergenzbedingungen.

1. Eine Reihe $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$ heisst konvergent, wenn die Grenze von s_n bei unbegrenzt wachsendem n eine endliche Zahl ist.

2. die abnehmende geometrische Reihe ist konvergent, also $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots$ ist konv., wenn der absolute Betrag von $x < 1$.