



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

Mathematische Geographie.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-78595](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-78595)

Mathematische Geographie.

I. Beobachtungsmittel.

§ 62. Koordinatensysteme.

A) Zenitlinie, Horizont.

1. Zenitlinie = Vertikallinie durch den Beobachtungsort; ihre Schnittpunkte mit der Himmelskugel heissen Zenit (Scheitelpunkt) und Nadir (Fusspunkt).

2. Horizont (wahrer Horizont), die durch den Erdmittelpunkt senkrecht zur Zenitlinie gelegte Ebene; scheinbarer Horizont = Berührungsebene an die Erdkugel im Beobachtungsort; scheinbarer Horizont parallel dem wahren. — (Horizontalkreise senkrecht zur Zenitlinie.

3) Ost- und Westpunkt, Schnittpunkte des Horizonts mit dem Himmelsäquator (s. B); Süd- und Nordpunkt je um 90° vom Ost- und Westpunkt abgehend, Mittagslinie verbindet diese beiden.

4. Vertikalkreise (Höhenkreise), Schnittkreise der durch die Zenitlinie gelegten Ebenen mit der Himmelskugel, sie sind senkrecht zum Horizont; erster Vertikal geht durch Ost- und Westpunkt.

B) Weltaxe, Aequator.

5. Weltaxe, verlängerte Erdaxe, Drehungsaxe der Himmelskugel; Weltpole (Nordpol, Südpol) Schnittpunkte der Weltaxe mit der Himmelskugel.

6. Aequatorebene durch den Erdmittelpunkt senkrecht zur Weltaxe.

7. Meridiane oder Deklinationenkreise, Grosskreise durch die Weltpole, senkrecht zum Aequator; Hauptmeridian durch Zenit, durch Süd- und Nordpunkt.

8. Polhöhe = Neigungswinkel der Weltaxe gegen den Horizont. Aequatorhöhe = Neigungswinkel der Aequatorebene gegen den Horizont.

a) Polhöhe = geographische Breite.

Die Polhöhe h_p wird bestimmt durch Beobachtung der Aequatorhöhe h_a zur Aequinoktialzeit, $h_p = R - h_a$ oder oder als arithmetisches Mittel aus oberer und unterer Kulminationshöhe eines Circumpolarsternes. — Aus der Polhöhe erhält man die geographische Breite.

9. Sichtbare Sterne für einen Ort von der geographischen Breite φ sind diejenigen, deren Abstand vom sichtbaren Pol $< 180^\circ - \varphi$, vom unsichtbaren $< \varphi$ ist.

10. Circumpolarsterne, Abstand vom sichtbaren Pol $\leq \varphi$.

C) Ekliptik, Axe der Ekliptik.

11. Ekliptik = scheinbare jährliche Bahn der Sonne, Ebene der Erdbahn.

12. Schiefe der Ekliptik = Neigung der Ekliptik gegen den Aequator, = $23\frac{1}{2}^\circ$, genau $23^\circ 27' 13''$.

13. Axe der Ekliptik = Lot im Erdmittelpunkt auf der Ekliptik; Endpunkte dieser Axe Pole der Ekliptik.

14. Tag- und Nachtgleichpunkte = Schnittpunkte der Ekliptik mit dem Aequator, Frühlingsäquinoktium (Frühlings- oder Widderpunkt \varnothing) und Herbstäquinoktium; Sonnenwendepunkte oder Solstitien stehen von den vorigen je um 90° ab.

15. Breitenkreise, Grosskreise durch die Ekliptikpole, \perp zur Sonnenbahn.

§ 63. Lagebestimmung.

1. System A. — Grundkreise: Hauptmeridian und Horizont.

Höhe h gezählt auf dem Vertikalkreise vom Aequator aus $0^\circ - 90^\circ$ nördl. oder südl.

Azimuth a (A) gezählt auf dem Horizont vom Südpunkt aus über W, N, O von $0^\circ - 360^\circ$. Ermittlung dieser Koordinaten durch den Theodolit, Höhe auch durch den Sextanten und annähernd durch Schattenlänge ($\text{tg } h = \frac{l}{s}$).

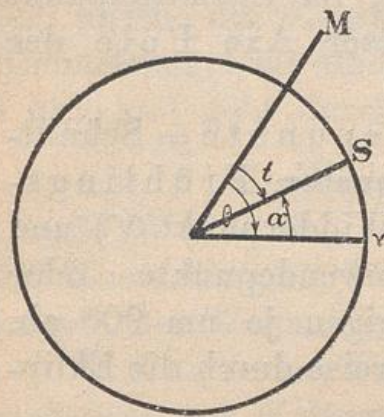
2. System B.

a) Deklination δ , nördlich (+) oder südlich (—), sphärischer Abstand des Sterns vom Aequator; Pol-distanz $90^\circ - \delta$.

Stundenwinkel t = Aequatorialbogen zwischen Meridian des Beobachtungsortes und Meridian des Sterns, gezählt von dem ersteren aus von $0^\circ - 360^\circ$ über W und N (wie das Azimut); statt Gradzählung auch Stundenzählung ($15^\circ = 1 \text{ St.}$) ringsherum $0 - 24^h$, oder nach beiden Seiten.

Messung durch Aequatoreal.

b) Deklination δ , wie in a, und



Rektascension α (A. R.), gezählt im Aequator vom Frühlingsspunkt (γ) aus, entgegengesetzt dem Sinn der täglichen Bewegung der Sonne von $0^\circ - 360^\circ$.

Sternzeit θ = Stundenwinkel des Frühlingsspunktes, z. B. 1^h Sternzeit, wenn Stundenwinkel des Frühlingsspunktes 15° . $\theta - t = \alpha$.

Messung mit Passage-Instrument und Uhr nach Sternzeit.

3. System C.

Breite β nördlicher oder südlicher Abstand des Sterns von der Ekliptik, gezählt vom Aequator.

Länge λ , Bogen der Ekliptik zwischen Frühlingspunkt und Breitenkreis, gezählt vom Frühlingspunkt aus im Sinn von α von 0° — 360° .

Diese Koordinaten sind nicht mehr gebräuchlich.

4. Sternbilder.

Die zwölf Sternbilder des Tierkreises sind:

| | | | | | |
|-----------|-------------|----------|-------------|------------|------------|
| Widder | φ | Löwe | Ω | Schütze | ξ |
| Stier | γ | Jungfrau | mp | Steinbock | ζ |
| Zwillinge | II | Wage | L | Wassermann | \approx |
| Krebs | \odot | Skorpion | M | Fische | H |

§ 64. Die Zeit.

1. Sterntag à 24 Sternstunden = Zeit zwischen 2 oberen Kulminationen eines Sterns, = Zeit einer vollständigen Umdrehung der Erde. 0^h Sternzeit, wenn der Frühlingspunkt im Meridian; Dauer eines Sterntags $23,935^h = 23^h 56^m 4^s$ m. Z.

2. Mittlerer Sonnentag = bürgerlicher Tag, = Zeit zwischen 2 Kulminationen der gedachten, im Aequator mit gleichförmiger Geschwindigkeit laufenden Sonne.

3. Zeitgleichung = Differenz zwischen wahren und mittlerem Mittag (Kulminationen der wahren und der gedachten Sonne).

4. Tropisches Jahr = scheinbare Umlaufszeit der Sonne, von γ Punkt zu γ Punkt = $365,2422$ m. T. = 365 T. $5^h 48^m 46^s$ m. Z. = $366,2422$ Sterntage.

5. Siderisches Jahr = wirkliche Umlaufszeit

der Erde von Fixstern zu Fixstern = 365,2564 mittl. Tage = 365 T. 6^h 9^m 11^s m. Z. = 366,2564 Sterntage.

6. Siderischer Monat = Umlauf von Fixstern zu Fixstern = 27,32 Tg.

7. Synodischer Monat = Zeit von Neumond zu Neumond (d. h. von Sonne zu Sonne) 29,53 Tg.

8. Astronomische Jahreszeiten.

Beginn des Frühlings am 21. März, Sonne im Aequator, im γ Punkt, Tag- und Nachtgleiche.

Beginn des Sommers am 21. Juni, Sonne im Wendekreis des Krebses, längster Tag (Sommersolstitium).

Beginn des Herbstes am 23. September, Sonne im Aequator, Tag- und Nachtgleiche.

Beginn des Winters am 21. Dezember, Sonne im Wendekreis des Steinbocks, kürzester Tag (Wintersolstitium).

II. Das Sonnensystem.

§ 65. Die Erde.

A) Gründe für die Kugelgestalt.

1. Erscheinungen infolge der Ortsveränderungen auf einem Meridian oder einem Parallelkreis.
2. Schattenform bei Mondfinsternissen und die Gestalt der andern Himmelskörper.
3. Depression des Horizonts.
4. Umschiffungen der Erde in verschiedenen Richtungen.
5. Ergebnisse der Gradmessungen.

B) Gründe für die Rotation.

1. Ablenkung der Luftströmungen.
2. Oestliche Abweichung fallender Körper.
3. Foucault'scher Pendelversuch.
4. Rotation anderer Weltkörper.
5. Abplattung der Erde ($\frac{1}{296}$ bis $\frac{1}{300}$).

§ 66. Planeten, Sonne und Mond.

| | Aequatorial halbmesser | Mittlere Entfernung von der Sonne | Dichte | Masse | Rotations- dauer | Umlaufzeit | Anzahl der Tra- banten |
|-------------|---------------------------|--|--------|--------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------|
| Merkur ☿ | 0,38 | 0,39 | 1—2 | 0,06 | 88 T. | 88 T. | — |
| Venus ♀ | 0,99 | 0,72 | 0,83 | 0,81 | 224 ² / ₃ T. | 224 ² / ₃ T. | — |
| Erde ♂ | 1 (= 6377,4 km) | 1*) | 1 | 1**) | 24 h | 365 ¹ / ₄ T. | 1 |
| Mars ♂ | 0,53 | 1,52 | 0,72 | 0,105 | 24 ¹ / ₂ h | 1 J. 322 T. | 2 |
| Planetoiden | | 2,2—4,3 | | | | 3—9 J. | — |
| Jupiter ♃ | 11,06 | 5,20 | 0,24 | 311 | 10 h | 11 J. 315 T. | 5 |
| Saturn ♄ | 9,26 | 9,54 | 0,13 | 93,4 | 10 ¹ / ₄ h | 29 J. 167 T. | 8 |
| Uranus ♅ | 3,93 | 19,19 | 0,27 | 14,4 | 12 h? | 84 J. 7 T. | 4 |
| Neptun ♆ | 4,35 | 30,11 | 0,21 | 16,7 | | 164 J. 280 T. | 1 |
| Sonne | 108,5 | — | 0,25 | 326800 | 25 ¹ / ₂ T. | | |
| Mond | 0,272 | 60,3 Erd- halbm. | 0,60 | 0,012 | 29 ¹ / ₂ T. | | |

*) 148,7 Millionen km = 20 Millionen Meilen.

***) Auf Wasser = 1 bezogen ist die Dichte der Erde 5,6.

§ 67. Weltsysteme.

1. Ptolemäisches System. Die Erde ist Mittelpunkt des Weltalls, um sie bewegen sich Mond, Merkur, Venus, Sonne, Mars, Jupiter, Saturn. Unregelmässigkeiten in der Bewegung werden durch Epicykeln erklärt.

2. Copernicanisches System. Die Sonne steht still, um sie bewegen sich Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn in kreisförmigen, exzentrischen Bahnen.

3. Keplers Gesetze.

1. Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Der Planet bewegt sich so, dass der Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreibt.

3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der grossen Achsen.

4. Titiuszahlen. Entfernungen

| | | | | |
|----------------------|-----------------|-------|--------------|-------------------|
| Merkur | von der Sonne = | 4 | | |
| Venus | " " | " | = | $4 + 3$ |
| Erde | " " | " | = | $4 + 3 \cdot 2$ |
| Mars | " " | " | = | $4 + 3 \cdot 2^2$ |
| Planetoiden | " " | " | = | $4 + 3 \cdot 2^3$ |
| Jupiter | " " | " | = | $4 + 3 \cdot 2^4$ |
| Saturn | " " | " | = | $4 + 3 \cdot 2^5$ |
| Uranus | " " | " | = | $4 + 3 \cdot 2^6$ |
| Neptun | " " | " | = | $4 + 3 \cdot 2^7$ |
| wirkliche Entfernung | | 7,8 | Mill. Meilen | |
| " | " | 14,5 | " | " |
| " | " | 20,1 | " | " |
| " | " | 30,6 | " | " |
| " | " | 56 | " | " |
| " | " | 104,7 | " | " |
| " | " | 190 | " | " |
| " | " | 386 | " | " |
| " | " | 605 | " | " |

§ 68. Berechnungsaufgaben.

1. Flächeninhalt J einer Zone zwischen den geographischen Breiten φ_1 und φ_2

$$\begin{aligned} J &= 2 r \pi h = 2 r \pi (r \sin \varphi_1 - r \sin \varphi_2) \\ &= 4 r^2 \pi \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \end{aligned}$$

der Teil dieser Zone, der von den Meridianen zur Länge λ_1 und λ_2 begrenzt wird, ist

$$J = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^0}{360^0} 4 r^2 \pi \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

(Berechnung des Inhalts von Kartenblättern.)

Kimm und Kimmtiefe. — Kimm = Kreis, welcher den scheinbaren Horizont begrenzt (Halbmesser a = Sehne = Bogen); Kimmtiefe (α'') = Winkel zwischen dem Sehstrahl nach der Kimm und der Horizontalen, Höhe des Beobachtungspunktes h

$$1. a = \sqrt{2rh}$$

$$2. \alpha'' : \frac{180.60.60''}{\pi} = a : r \text{ oder } \alpha'' = \sqrt{\frac{2h}{r}} \cdot 206\,265'',$$

hiebei ist von der Strahlenbrechung, welche a vergrößert und α verkleinert abgesehen.

3. Beziehungen zwischen den Koordinaten der Systeme A und B (s. § 61). In dem Dreieck Zenit-Pol-Stern sind die Seiten $ZP = 90^0 - \varphi$, $ZS = 90^0 - h$, $PS = 90^0 - \delta$; die ZS und PS gegenüberliegenden Winkel sind t (bezw. $360^0 - t$) und $180^0 - a$. Aus den Formeln I—III des § 62 folgt, wenn

1. a und h gegeben, t und δ gesucht (φ ist als bekannt vorausgesetzt):

$$\begin{cases} \sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos a \\ \cos \delta \sin t = \cos h \sin a \\ (\cos \delta \cos t = \sin h \cos \varphi + \cos h \sin \varphi \cos a). \end{cases}$$

2. t und δ gegeben, gesucht a und h .

$$\begin{cases} \sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t \\ \cos h \sin a = \cos \delta \sin t \\ (\cos h \cos a = -\sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t). \end{cases}$$

4. Parallaxe; Entfernung eines Gestirns.

a) Höhenparallaxe $p =$ Winkel, unter welchem vom Gestirn aus der zum Beobachtungsort gehörige Erdhalbmesser r erscheint, = Unterschied der Höhenwinkel über dem wahren und über dem scheinbaren Horizont

$$p = h' - h;$$

die Entfernung R des Gestirns ist dann

$$R = \frac{r \cos h}{\sin p}.$$

b) Ist das Gestirn im Horizont, dann heisst p die Horizontparallaxe (π),

$$R = \frac{r}{\sin \pi}.$$

Ist der in Frage kommende Halbmesser ein Aequatorhalbmesser, so heisst p die Aequatorial-Horizontalparallaxe.

c) Bei Fixsternen ist die Parallaxe des Erdhalbmessers (tägl. Parallaxe) verschwindend; man benützt für sie die Parallaxe des Erdbahnhalmessers, die jährliche Parallaxe; sie ist bei keinem Fixstern über $1''$.

d) Die Parallaxe des Mondes kann aus direkter Beobachtung ermittelt werden; die Horizontalparallaxe beträgt für denselben $53\frac{1}{2}' - 61\frac{1}{2}'$, im Mittel $57\frac{1}{2}'$.

e) Die Parallaxe der Sonne ist zur Bestimmung durch direkte Beobachtung zu klein; sie kann gefunden werden aus den Marsoppositionen und dem dritten Keplerschen Gesetz (aus der Parallaxe des Mars zunächst seine Entfernung $d = R_1 - R$ von der Erde, dann folgt aus

$R_1^3 : R^3 = t_1^2 : t^2$, $(R_1 - R) : R = \left(\sqrt[3]{t_1^2} - \sqrt[3]{t^2} \right) : \sqrt[3]{t^2}$, oder durch die Methode der Venusdurchgänge, oder aus der Messung der Parallaxe eines Planetoiden (z. B. Flora); ihr Wert ist etwa $8,85''$.

f) Ausser vermittelt der Parallaxe kann die Entfernung der Sonne noch durch andere Mittel gefunden werden, insbesondere aus der Geschwindigkeit des Lichts und der Zeit, welche dasselbe braucht, um von der Sonne zur Erde zu gelangen (Verfinsterung der Jupiterstrabanten).

5. Auf- und Untergang der Gestirne, Tageslänge. Aus § 683,2 folgt für $h = 0$

$$\cos t_0 = -\operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi.$$

Die Tageslänge ist gleich dem doppelten Stundenwinkel t_0 (für $h = 0$) der Sonne. Ergiebt sich aus δ und φ z. B. $t_0 = 120^\circ = 8^h$, so ist die Tageslänge 16^h .

Für Morgen- und Abendweite w (Bogen zwischen Ost- und Aufgangspunkt, bzw. zwischen West- und Untergangspunkt) ist

$$\sin w = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.$$

Für das Azimut a_0 des Aufgangspunktes ist

$$\cos a_0 = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.$$

6. Entfernung e zweier Punkte $(\lambda_1, \varphi_1; \lambda_2, \varphi_2)$ auf der Erdoberfläche

$$\cos e = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_1 - \lambda_2).$$

Liegen beide auf demselben Meridian, dann ist $e = \varphi_1 - \varphi_2$.

Liegen sie auf demselben Parallelkreis, dann ist $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ und daher

$$\sin \frac{e}{2} = \cos \varphi \sin \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}.$$