Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

Linien zweiter Ordnung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

die Gleichung eines Punktes auf der Verbindungslinie von P_1 und P_2; ist λ veränderlich, so hat man die Gleichung einer Punktreihe.

6. Doppelverhältnis. Sind

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} U_1 - \lambda_1 U_2 = 0 \\ U_1 - \lambda_2 U_2 = 0 \end{cases}$$

vier Punkte auf einer Geraden, so ist das Doppelverhältnis derselben ausgedrückt durch $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

7. Harmonische Punkte. Wenn $\lambda_1 : \lambda_2 = -1$, so sind die vier Punkte (von Nr. 6) harmonische Punkte; sie sind also dargestellt durch

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} U_1 - \lambda U_2 = 0 \\ U_1 + \lambda U_2 = 0 \end{cases}$$

8. Projektivische Punktreihen. Zwei Punktreihen $U_1 - \lambda U_2 = 0$ und $V_1 - \lambda V_2 = 0$ sind projektivisch.

Eine Punktreihe $U_1 - \lambda U_2 = 0$ und ein Strahlbüschel $L_1 - \lambda L_2 = 0$ sind projektivisch.

§ 77. Homogene Gleichung des Punktes, trimetrische Linienkoordinaten.

Sind $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ die Gleichungen dreier nicht auf einer Geraden liegenden festen Punkte, so kann die Gleichung jedes anderen Punktes in die Form gebracht werden

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0.$$

Linien zweiter Ordnung (Kegelschnitte).

A. Der Kreis.

§ 78. Kurvengleichung; Sekante, Tangente, Polare etc.

Koordinaten des Mittelpunktes (a, b), Halbmesser r.

1. Allgemeine Gleichung des Kreises

$$(1)\quad \mathbf{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}.$$

2. (2) $(\mathbf{x} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{y} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{r}^2$

$$a = -\frac{A}{2},\ b = -\frac{B}{2},\ r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}.$$

Ist $A^2 = 4C$, oder $B^2 = 4C$, dann berüht der Kreis die X-, bezw. die Y axe, ist $C = 0$, so geht der Kreis durch den Ursprung. — Für die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Axen ist $x_1 + x_2 = 2a$, $y_1 + y_2 = 2b$.

3. Der Ursprung ist Mittelpunkt:

(3) $x^2 + y^2 = r^2$ (Mittelpunktsgleichung).

4. Mittelpunkt auf der Xaxe im Abstand r vom Ursprung:

$y^2 = 2rx - x^2$ (Scheitelgleichung).

5. Gleichung für ein schiefwinkliges System:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + 2(x - a)(y - b)\cos\omega = r^2.$$

6. Sekante durch die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), Mittelpunkt im Ursprung:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \text{ oder } y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1).$$

7. Tangente, Berührungspunkt (x_1, y_1), Mittelpunkt (0, 0):

(1) $\mathbf{x x_1 + y y_1 = r^2}$,

Mittelpunkt (a, b):

(2) $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$.

Bezeichnet man den Winkel, den der Halbmesser zum Berührungspunkt mit der X axe macht mit α, so gehen die vorstehenden Gleichungen (1) und (2) über in

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = r$$
$$(x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha = r.$$

Die Gerade $y = mx + b$ ist Tangente an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$, wenn

$$m = -\frac{x_1}{y_1},\ b = \frac{r^2}{y_1}.$$

Die Koordinaten des Berührungspunktes

(x_1, y_1) einer von dem Punkt (x', y') ausserhalb des Kreises gezogenen Tangente ergeben sich aus den Gleichungen

$$x' x_1 + y' y_1 = r^2$$
$$x_1^2 + y_1^2 = r^2.$$

Die Gleichung dieser Tangente (zwei Lagen) ist

$$y - y' = \frac{-x' y' \pm r\sqrt{x'^2 + y'^2 - r^2}}{r^2 - x'^2} (x - x').$$

8. Polare (s. § 49) des Punktes (x_1, y_1) in Beziehung auf den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$

$$x x_1 + y y_1 = r^2.$$

Die Koordinaten des Pols der Geraden $Ax + By + C = 0$ sind

$$x_1 = -\frac{A r^2}{C}, \quad y_1 = -\frac{B r^2}{C}.$$

9. Kreis durch drei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3); er ist bestimmt durch die vier Gleichungen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$
$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$$
$$(x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 = r^2$$
$$(x_3 - a)^2 + (y_3 - b)^2 = r^2,$$

seine Gleichung ist daher

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x, & y, & 1 \\ x_1^2 + y_1^2, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^2 + y_2^2, & x_2, & y_2, & 1 \\ x_3^2 + y_3^2, & x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(Zugleich Bedingung dafür, dass vier Punkte auf einem Kreis liegen.)

10. Zwei Kreise

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$
$$x^2 + y^2 + A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

sind konzentrisch, wenn $A = A_1$, $B = B_1$.

11. Potenzlinie (s. § 51) zweier Kreise (s. Nr. 10):

$$(A - A_1) x + (B - B_1) y + C - C_1 = 0$$

(Differenz der Kreisgleichungen, vgl. § 51_3 und § 70_4).

§ 79. Polarkoordinaten.

Ist O der Pol (Anfangspunkt), M der Mittelpunkt, OX die Polaraxe, $\sphericalangle MOX = \alpha$, $\sphericalangle POX = \varphi$, $OP = \varrho$, $OM = d$, so ist

1. die Gleichung des Kreises

$$(\varrho \cos \varphi - d \cos \alpha)^2 + (\varrho \sin \varphi - d \sin \alpha)^2 = r^2 \text{ oder}$$
$$\varrho^2 - 2 \varrho d \cos(\varphi - \alpha) + d^2 = r^2.$$

Fällt OM mit OX zusammen (Mittelpunkt auf der Polaraxe), so ist die Gleichung des Kreises

$$\varrho^2 - 2 \varrho d \cos \varphi + d^2 = r^2.$$

Liegt ausserdem O auf dem Kreis, so ist

$$\varrho = 2 r \cos \varphi.$$

2. Hat der Leitstrahl für seine Schnittpunkte mit dem Kreis die Längen ϱ_1 und ϱ_2, so ist

$$d \cos(\varphi - \alpha) = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}.$$

3. Für den berührenden Leitstrahl ist

$$d \sin(\varphi - \alpha) = r.$$

B. Parabel, Ellipse, Hyperbel.

§ 80. Kurvengleichungen; Sekante, Tangente, Polare etc.

1. Stücke und Bezeichnungen.

$\left.\begin{array}{l}\text{Grosse Axe } 2a \\ \text{kleine } \;\;\text{"}\;\; 2b\end{array}\right\}$ bei Ellipse und Hyperbel

Parameter 2 p (= Sehne durch einen Brennpunkt parallel zu der Leitlinie); für Ellipse und Hyperbel ist $p = \frac{b^2}{a}$.

Lineare Exzentrizität (Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt) ist bei der

Ellipse $f = \sqrt{a^2 - b^2}$;

Hyperbel $f = \sqrt{a^2 + b^2}$;

Parabel: Abstand des Brennpunktes vom Scheitel $\frac{p}{2}$;

Numerische Exzentrizität $\varepsilon = \frac{f}{a}$.

ε giebt zugleich das Verhältnis der Entfernung eines Kurvenpunktes vom Brennpunkt und seines Abstandes von der zugehörigen Leitlinie an. Es ist für die

Ellipse $\varepsilon < 1$,
Parabel $\varepsilon = 1$,
Hyperbel $\varepsilon > 1$.

Ferner ist $p = a(1 - \varepsilon^2)$; $b^2 = a \,.\, p$; $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$

Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie $= \frac{p}{\varepsilon}$.

2. Scheitelgleichung. Erste Form

$$\text{I. } y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2$$

(gemeinschaftliche Gleichung).

Diese Gleichung stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem $\varepsilon \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} 1$. $\varepsilon = 0$ giebt die Scheitelgleichung eines Kreises.

Zweite Form:

$$\text{II. } \begin{cases} y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 & \text{(Ellipse)} \\ y^2 = 2px & \text{(Parabel)} \\ y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 & \text{(Hyperbel).} \end{cases}$$

3. Mittelpunktsgleichung:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 & \text{(Ellipse)} \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 & \text{(Hyperbel)} \end{cases}$$

$$x^2 - y^2 = a^2 \text{ (Gleichseitige Hyperbel).}$$

4. Polargleichung.

1. Der Brennpunkt ist Pol, die Axe bezw. grosse Axe ist Polaraxe, φ ist von dem Scheitel aus gezählt, der dem Pol am nächsten liegt.

$$\varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Die Kurve ist eine Ellipse, Parabel, Hyperbel je nachdem $\varepsilon \lesseqgtr 1$. Für die Parabel ist insbesondere

$$\varrho = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

2. Der Mittelpunkt ist Pol, die grosse Axe Polaraxe

$$\varrho^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \text{ (Ellipse);}$$

$$\varrho^2 = \frac{-b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \text{ (Hyperbel).}$$

Die folgenden Gleichungen sind bei der Parabel auf die Scheitel-, bei Ellipse und Hyperbel auf die Mittelpunktsgleichung zu beziehen.

5. Sekante durch die beiden Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) der

1. Parabel:

$$(y_1 + y_2)\, y - y_1 y_2 = 2px \text{ oder}$$

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_2 + y_1}(x - x_1).$$

2. Ellipse:

$$\frac{(x_1 + x_2)\, x}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2)\, y}{b^2} = \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + 1, \text{ oder}$$

$$y - y_1 = -\frac{b^2 (x_1 + x_2)}{a^2 (y_1 + y_2)}(x - x_1).$$

3. Hyperbel:

$$\frac{(x_1 + x_2)\,x}{a^2} - \frac{(y_1 + y_2)\,y}{b^2} = \frac{x_1\,x_2}{a^2} - \frac{y_1\,y_2}{b^2} + 1, \text{ oder}$$

$$y - y_1 = \frac{b^2\,(x_1 + x_2)}{a^2\,(y_1 + y_2)}\,(x - x_1).$$

6. Tangente im Punkt (x_1, y_1) der

1. Parabel: $y\,y_1 = p\,(x + x_1)$.

2. Ellipse: $\frac{x\,x_1}{a^2} + \frac{y\,y_1}{b^2} = 1$, oder

$$y - y_1 = -\frac{b^2\,x_1}{a^2\,y_1}\,(x - x_1).$$

3. Hyperbel: $\frac{x\,x_1}{a^2} - \frac{y\,y_1}{b^2} = 1$, oder

$$y - y_1 = \frac{b^2\,x_1}{a^2\,y_1}\,(x - x_1).$$

7. Asymptoten der Hyperbel

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0.$$

Ist der Asymptotenwinkel $2\,\varphi$, so ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$.

Bei der gleichseitigen Hyperbel stehen die Asymptoten auf einander senkrecht.

Ein Durchmesser $y = m\,x$ schneidet, berührt im unendlich fernen Punkt (ist also Asymptote), trifft die Hyperbel nicht, je nachdem $m^2 \lesseqgtr \frac{b^2}{a^2}$.

8. Normale im Punkt (x_1, y_1) der

1. Parabel: $p\,(y - y_1) + y_1\,(x - x_1) = 0$, oder

$$x\,y_1 + p\,y = y_1\,(x_1 + p).$$

2. Ellipse: $\frac{a^2\,x}{x_1} - \frac{b^2\,y}{y_1} = a^2 - b^2$, oder

$$y - y_1 = \frac{a^2\,y_1}{b^2\,x_1}\,(x - x_1).$$

3. Hyperbel: $\frac{a^2 x}{x_1} + \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 + b^2$, oder

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

9. Bezeichnet man die Abscisse des Schnittpunktes der Tangente im Punkt (x_1, y_1) mit der Xaxe mit x_0, die Subtangente (Projektion des Tangentenstückes zwischen Berührungspunkt und Xaxe auf die Xaxe) mit ST, die Subnormale mit SN, so ist

	x_0	ST	SN
1. für die Parabel:	$-x_1$	$2x_1$	p
2. „ „ Ellipse	$\frac{a^2}{x_1}$	$\frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$	$-\frac{b^2 x_1}{a^2}$
3. „ „ Hyperbel	$\frac{a^2}{x_1}$	$\frac{x_1^2 - a^2}{x_1}$	$\frac{b^2 x_1}{a^2}$

Aus dem Wert von x_0 ergiebt sich für jede Kurve eine Konstruktion der Tangente im Punkte (x_1, y_1).

10. Tangente vom Punkt (x_1, y_1) ausserhalb der

1. Parabel:

$$y - y_1 = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2px_1}}{2x_1}(x - x_1).$$

2. Ellipse:

$$y - y_1 = \frac{x_1 y_1 \pm \sqrt{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - a^2 b^2}}{x_1^2 - a^2}(x - x_1).$$

3. Hyperbel:

$$y - y_1 = \frac{x_1 y_1 \pm \sqrt{a^2 b^2 - (b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2)}}{x_1^2 - a^2}(x - x_1).$$

11. Allgemeine Gleichung der Tangente (Richtung gegeben) für die

1. Parabel: $y - mx = \frac{p}{2m}$.

2. Ellipse: $y - mx = \pm\sqrt{m^2 a^2 + b^2}$.

3. Hyperbel: $y - mx = \pm\sqrt{m^2 a^2 - b^2}$.

12. Polare des Punktes (x_1, y_1) in Beziehung auf die

1. Parabel: $y y_1 = p(x + x_1)$.
2. Ellipse: $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$.
3. Hyperbel: $\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1$.

Liegt Punkt (x_1, y_1) auf der Kurve, so ist seine Polare zugleich Tangente. Die Polare des Mittelpunkts ist die unendlich ferne Gerade; die Polare eines unendlich fernen Punktes ist ein Durchmesser.

13. Koordinaten des Pols der Geraden $Ax + By + C = 0$, für die

1. Parabel: $x_1 = + \frac{C}{A}$, $y_1 = - \frac{Bp}{A}$.
2. Ellipse: $x_1 = - \frac{a^2 A}{C}$, $y_1 = - \frac{b^2 B}{C}$.
3. Hyperbel: $x_1 = - \frac{a^2 A}{C}$, $y_1 = \frac{b^2 B}{C}$.

14. Zwei Geraden heissen konjugiert in Bezug auf einen Kegelschnitt, wenn jede durch den Pol der andern geht, die Koordinaten des Pols der einen müssen also die Gleichung der andern befriedigen.

1. Ist bei der Parabel ein unendlich ferner Punkt gegeben durch die Richtung $y = mx$, so ist der zugehörige Durchmesser
$$y = \frac{p}{m}.$$
2. Gleichungen für zwei konjugierte Durchmesser bei der

Ellipse: $Ax - By = 0$ und $\frac{Bx}{a^2} + \frac{Ay}{b^2} = 0$.

Hyperbel: $Ax + By = 0$ und $\frac{Bx}{a^2} + \frac{Ay}{b^2} = 0$.

Jede Asymptote der Hyperbel und ihr konjugierter Durchmesser fallen zusammen.

15. Gleichung in Beziehung auf zwei konjugierte Durchmesser $2a_1$, $2b_1$

1. Ellipse: $\frac{x^2}{a_1^{\,2}} + \frac{y^2}{b_1^{\,2}} = 1$; Beziehung: $a_1^{\,2} + b_1^{\,2} = a^2 + b^2$

2. Hyperbel: $\frac{x^2}{a_1^{\,2}} + \frac{y^2}{b_1^{\,2}} = 1$: „ $a_1^{\,2} - b_1^{\,2} = a^2 - b^2$

Sind φ und φ_1 die Winkel, welche zwei konjugierte Durchmesser mit der Hauptaxe bilden, so ist für die

3. Ellipse: $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{b^2}{a^2}$; $a_1\, b_1 \sin(\varphi - \varphi_1) = a\, b$ (s. § 81_{24})

4. Hyperbel: $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi_1 = +\frac{b^2}{a^2}$; $a_1\, b_1 \sin(\varphi - \varphi_1) = a\, b$ (s. § 81_{25})

Gleichung der Hyperbel in Beziehung auf die beiden Asymptoten

$$x' y' = c^2 = \frac{f^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4};$$

gleichseitige Hyperbel $x' y' = \frac{1}{2} a^2$

16. Leitlinie (Direktrix), d. h. Polare des Brennpunktes für die

1. Parabel: $x = -\frac{p}{2}$; Brennpunkt $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

2. Ellipse: $x = \frac{a^2}{f} = \frac{a}{\varepsilon}$; f. d. Brennpunkt $(f, 0)$

3. Hyperbel: $x = \frac{a^2}{f} = \frac{a}{\varepsilon}$; „ „ „ $(f, 0)$

17. Länge des Brennstrahls, bezw. der Brennstrahlen zu dem Punkt (x_1, y_1)

1. Parabel: $r = x_1 + \frac{p}{2}$

2. Ellipse: $r = a - x_1 \varepsilon$

$r_1 = a + x_1 \varepsilon$; $\mathbf{r + r_1 = 2a}$

3. Hyperbel: $r = x_1 \varepsilon - a$

$r_1 = x_1 \varepsilon + a$; $\mathbf{r_1 - r = 2a}$

18. Krümmungsmittelpunkt (x_0, y_0) und Krümmungshalbmesser ϱ für den Punkt (x_1, y_1) der

1. Parabel: $$\begin{cases} x_0 = 3x_1 + p = \dfrac{3y_1^2 + 2p^2}{2p} \\ y_0 = -\dfrac{y_1^3}{p^2} = -\dfrac{2x_1 y_1}{p} \end{cases}$$

$$\varrho = \frac{(y_1^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{N_x^3}{p^2}; \text{ für den Scheitel } \varrho = p.$$

2. Ellipse: $$\begin{cases} x_0 = \dfrac{f^2 x_1^3}{a^4} = \dfrac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2} \\ y_0 = -\dfrac{f^2 y_1^3}{b^4} = -\dfrac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^4} \end{cases}$$

$$\varrho = \frac{(b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{(r r_1)^{\frac{3}{2}}}{a b} = \frac{N_x^3}{p^2}$$

N_x Normale vom Punkt $(x_1 y_1)$ bis zur Xaxe. Für den Scheitel der grossen Axe ist

$\varrho_2 = \frac{b^2}{a} = p$, für den der kleinen

$\varrho_1 = \frac{a_2}{b}$

3. Hyperbel: $$\begin{cases} x_0 = \dfrac{f^2 x_1^3}{a^4} = \dfrac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2} \\ y_0 = -\dfrac{f^2 y_1^3}{b^4} = -\dfrac{a^2 \varepsilon^2 y_1^3}{f^4} \end{cases}$$

$$\varrho = \frac{(b^4 x_1{}^2 + a^4 y_1{}^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{(r\,r_1)^{\frac{3}{2}}}{a\,b} = \frac{N\,x^3}{p^2}$$

für den Scheitel ist

$$\varrho = \frac{b^2}{a} = p$$

19. Flächeninhalt

1. Parabelsegment S,

Sehne senkrecht zur Axe, (x_1, y_1) Koordinaten des einen Endpunkts:

$$S = \frac{4}{3} x_1 y_1.$$

Beliebiges Segment; (x_1, y_1), (x_2, y_2) Koordinaten der Endpunkte

$$S = \frac{(y_1 - y_2)^3}{12\,p} = \frac{x_1 - x_2}{6} \cdot \frac{(y_1 - y_2)^2}{y_1 + y_2}$$

2. Ellipsenzone zwischen der kleinen Axe und der im Abstand x_1 dazu parallelen Sehne

$$\frac{b}{a}\left(x_1 \sqrt{a^2 - x_1{}^2} + a^2 \arcsin \frac{x_1}{a}\right)$$

Gesamte Ellipsenfläche: $a b \pi$.

3. Hyperbelsegment, Sehne senkrecht zur Xaxe:

$$S = x_1 y_1 - a b \, l\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right)$$

20. Konfokale Kegelschnitte. — Eine Ellipse und eine Hyperbel, welche dieselben Brennpunkte haben, konfokal sind, haben folgende Gleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)} + 1 \\[2ex] \dfrac{x^2}{a_1{}^2} - \dfrac{y^2}{a_1{}^2(\varepsilon_1{}^2 - 1)} = 1 \end{cases}$$

wobei $a\,\varepsilon = a_1\,\varepsilon_1 = f$, $\varepsilon < 1$, $\varepsilon_1 > 1$. Die Gleichungen können demnach in folgende Form gebracht werden:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a_1{}^2} - \frac{y^2}{f^2 - a_1{}^2} = 1$$

Diese beiden konfokalen Kegelschnitte schneiden sich rechtwinklig (elliptische Koordinaten).

Die Gleichungen aller konfokalen Kegelschnitte sind in der Form enthalten

$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1;$$

sie stellt eine Ellipse, Hyperbel oder imaginäre Kurve dar, je nachdem $k < b^2 < a^2$, oder $b^2 < k < a^2$, oder $a^2 < k$.

§ 81. Sätze über Kegelschnitte.

A) Für jeden Kegelschnitt.

1. Die Polaren der sämtlichen Punkte einer Geraden gehen durch den Pol dieser Geraden, und die Pole sämtlicher Strahlen eines Büschels liegen auf der Polaren des Büschelmittelpunktes.

2. Die Halbierungspunkte paralleler Sehnen liegen auf einem Durchmesser.

3. Das Verhältnis der Entfernungen eines Punktes eines Kegelschnittes vom Brennpunkt und von der Leitlinie ist konstant und gleich der numerischen Exzentrizität ε. (Für die Ellipse ist $\varepsilon < 1$, für die Parabel $\varepsilon = 1$, für die Hyperbel $\varepsilon > 1$.)

4. Die Sehne, welche durch einen Brennpunkt geht und senkrecht zur grossen Axe ist, ist der Parameter.

5. Zieht man in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne Tangenten, so schneiden sich diese auf der Leitlinie, und die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit dem Brennpunkt steht senkrecht auf der Sehne.

6. Der Schnittpunkt zweier Tangenten liegt auf demjenigen Durchmesser, welcher der Sehne zwischen den Berührungspunkten konjugiert ist.

7. Sind in einer Ebene zwei Kurven zweiter Ordnung K und K_1 und bestimmt man zu jedem Punkt von K die Polare in Beziehung auf K_1, so umhüllen diese Polaren eine dritte Kurve zweiter Ordnung.

8. Satz des Pascal: Bei jedem einem Kegelschnitt einbeschriebenen einfachen Sechseck schneiden sich die drei Paare Gegenseiten in drei Punkten einer Geraden. (Konstruktion eines Kegelschnittes aus 5 Punkten.)

9. Satz des Brianchon: Bei jedem einem Kegelschnitt umbeschriebenen Sechseck schneiden sich die drei Verbindungslinien von je zwei Gegenecken in einem Punkte. (Konstruktion eines Kegelschnittes aus 5 Tangenten.)

10. Der Krümmungshalbmesser im Scheitel der grossen Axe ist gleich dem halben Parameter.

B) Für die Parabel.

11. Die Durchmesser einer Parabel sind parallel zur Axe.

12. Der Fusspunkt des Lotes vom Brennpunkt auf eine Tangente liegt auf der Scheiteltangente. (Konstruktion der Parabel durch Umhüllung.)

13. Der Ort des Schnittpunkts zweier Parabeltangenten, die senkrecht auf einander stehen, ist die Leitlinie.

14. Die Entfernung des Berührungspunktes einer Tangente vom Brennpunkt ist gleich der Entfernung des letzteren vom Schnittpunkt der Tangente mit der Axe. (Konstruktion der Tangente.)

15. Die Tangente halbiert den Winkel zwischen dem Brennstrahl und dem durch den Berührungspunkt

gehenden Durchmesser (Konstruktion der Tangente und Normale).

16. Die Parabel kann als Ellipse betrachtet werden, deren zweiter Brennpunkt in unendlicher Entfernung liegt.

C) Für Ellipse und Hyperbel.

17. Hat man ein System von Ellipsen, bezw. Hyperbeln, welche die Scheitel und die grosse Axe gemeinschaftlich haben, so schneiden sich alle Tangenten, welche die nämliche Abscisse für den Berührungspunkt haben, in einem und demselben Punkt der grossen Axe. (Konstruktion der Tangente.)

18. Alle Sehnen, welche einem Durchmesser parallel gezogen sind, werden von seinem konjugierten halbiert. Die Tangente im Endpunkt eines Durchmessers ist parallel zum konjugierten Durchmesser.

19. In jedem einem Kegelschnitt umbeschriebenen Parallelogramm sind die Diagonalen konjugierte Durchmesser; in jedem einem Kegelschnitt einbeschriebenen Parallelogramm sind die Seiten zwei konjugierten Durchmessern parallel.

20. Das Produkt der Entfernungen der Brennpunkte von einer Tangente ist unveränderlich ($= b^2$) und die Fusspunkte der Lote liegen auf einem Kreis, der die grosse Axe zum Durchmesser hat. (Konstruktion des Kegelschnitts durch Umhüllung.)

21. Die Tangente und die Normale in einem Punkt der Ellipse oder Hyperbel halbieren die Winkel, welche die Brennstrahlen nach diesem Punkt mit einander bilden. (Konstruktion der Tangente und der Normale.)

Hieraus folgt: Eine Ellipse und eine zu ihr konfokale Hyperbel schneiden sich unter rechten Winkeln.

22. Bei der Ellipse ist die Summe, bei der Hyperbel die Differenz der Brennstrahlen nach einem Punkt der

Kurve unveränderlich und zwar gleich der grossen Axe. (Faden-Konstruktion der Kurven.)

23. Auf jeder Sekante einer Hyperbel sind die beiden Abschnitte, welche zwischen der Kurve und ihren beiden Asymptoten liegen, einander gleich; der Abschnitt einer Tangente zwischen den Asymptoten wird durch den Berührungspunkt halbiert.

(Konstruktion der Hyperbel, wenn ein Punkt und die Asymptoten derselben gegeben sind.)

24. Der Inhalt eines Dreiecks, das zwischen zwei konjugierten Halbmessern einer Ellipse und der Verbindungslinie ihrer Endpunkte liegt, ist unveränderlich.

25. Der Inhalt eines Dreiecks, das von den Asymptoten und einer zwischen denselben liegenden Tangente einer Hyperbel eingeschlossen wird, ist unveränderlich.

---

26. Alle Parabeln sind einander ähnlich.

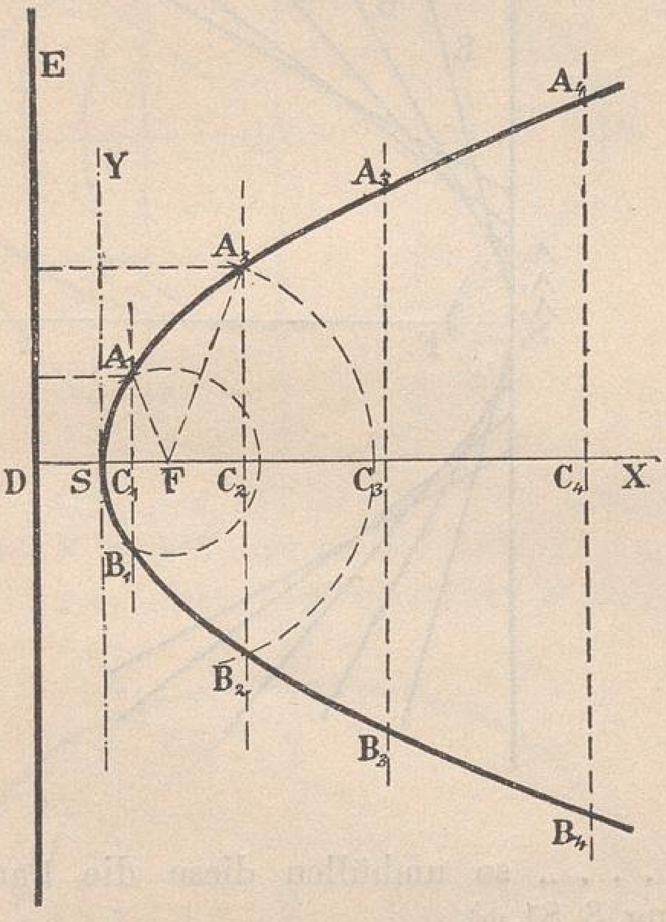
27. Zwei Ellipsen mit den Halbaxen (a, b), (a_1, b_1) sind einander ähnlich, wenn $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$; ebenso sind zwei Hyperbeln einander ähnlich, wenn $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$, d. h., wenn sie gleiche Asymptotenwinkel haben.

§ 82. Konstruktion der Kegelschnitte.

1. Parabel.

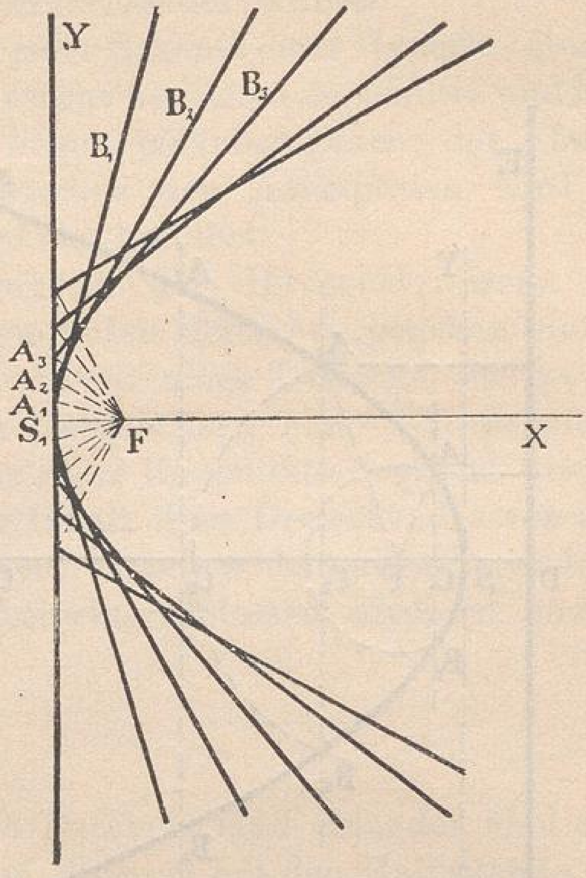
a) DX Achse, SY Scheiteltangente, DE Leitlinie, also $DS = SF = \frac{p}{2}$. — Ziehe in den beliebig, aber zweckmässig gewählten Punkten C_1, C_2, C_3 . . . Lote zur

Axe und beschreibe um F mit DC_1 einen Bogen, der das zu C_1 gehörige Lot in A_1 und B_1 schneidet; ver-



fahre ebenso mit DC_2 u. s. w. A_1, A_2, A_3 . . . ., B_1, B_2, B_3 . . . sind Parabelpunkte. (Begründung: Jeder Punkt der Parabel hat vom Brennpunkt und der Leitlinie gleiche Abstände.)

b) Durch Umhüllung. — SX Axe, SY Scheiteltangente, F Brennpunkt. Ziehe von F nach SY die Strahlen FA_1, FA_2, FA_3 . . . und errichte auf denselben in A_1, A_2, A_3 . . . die Lote $A_1 B_1$, $A_2 B_2$,

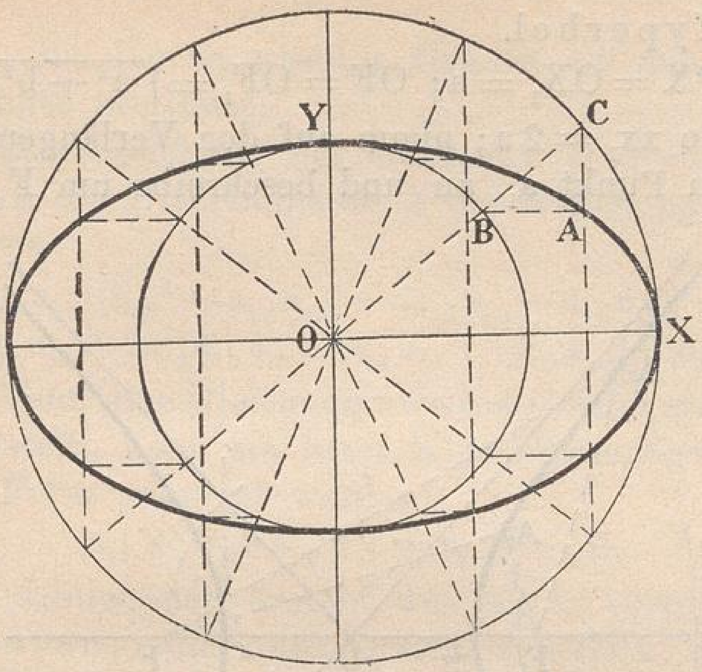


A_3 B_3 . . . ., so umhüllen diese die Parabel. (Begründung § 81,12).

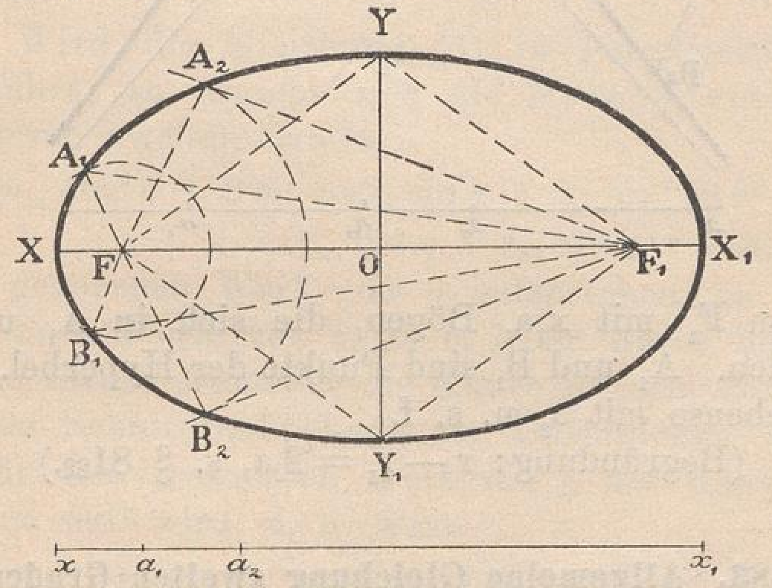
2. Ellipse.

a. OX = a, halbe grosse Axe, OY = b, halbe kleine Axe. Beschreibe um O mit a und b Kreise; ziehe durch O eine Gerade, welche die Kreise in B und C schneidet, ziehe CA $\perp$ OX, BA $\parallel$ OX, so ist A ein Punkt der Ellipse. Aehnlich weitere Punkte.

(Begründung: $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$).



b. $OX = OX_1 = a$, $OY = OY_1 = b$. Bestimme die Brennpunkte F und F_1 durch $FY = F_1Y = a$. Ziehe $xx_1 = XX_1 = 2\,a$; nimm darauf Punkt a beliebig an,



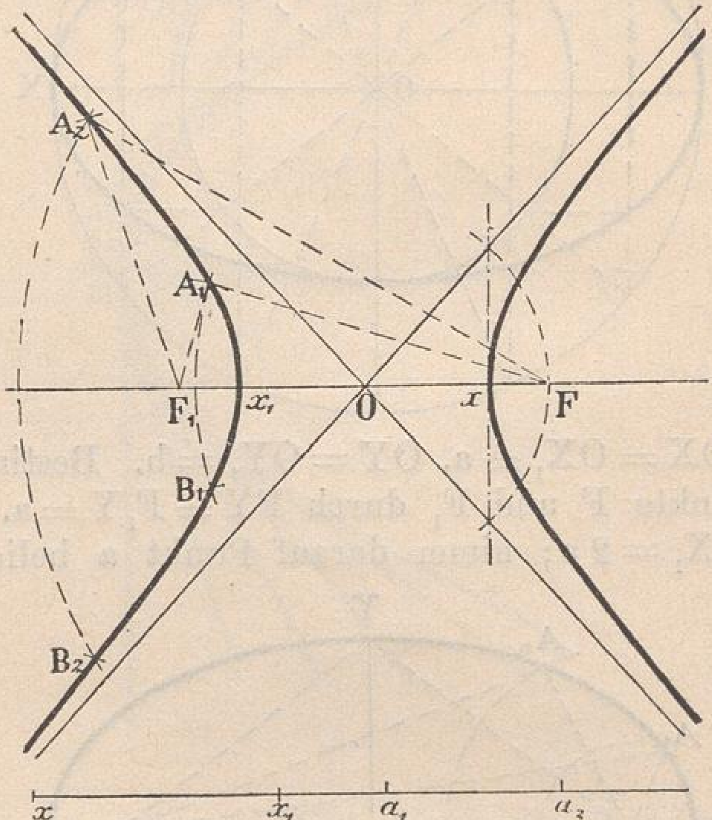
beschreibe um F mit xa_1 und um F_1 mit x_1a_1 Kreisbögen, die sich in in A_1 und B_1 schneiden u. s. f. A_1 und B_1 sind Punkte der Ellipse.

(Begründung: $r + r_1 = 2\,a$, s. § 81_{22}.)

3. Hyperbel.

$$OX = OX_1 = a; \; OF = OF_1 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ziehe $xx_1 = 2a$; nimm auf der Verlängerung von xx_1 einen Punkt a_1 an und beschreibe um F mit xa_1



und um F_1 mit x_1a_1 Bögen, die sich in A_1 und B_1 schneiden. A_1 und B_1 sind Punkte der Hyperbel. Verfahre ebenso mit a_2 u. s. f.

(Begründung: $r - r_1 = 2a$, s. § 81_{22}.)

§ 83. Allgemeine Gleichung zweiten Grades.

(1) $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$

1. Nach Division der Gleichung (1) mit a_{33} zeigt sich, dass die Gleichung fünf unabhängige Konstanten

enthält; eine Kurve zweiten Grades ist daher durch fünf Punkte bestimmt.

2. Die Gleichung (1) stellt ein Geradenpaar dar, wenn die Diskriminante Δ der Gleichung null ist, d. h. wenn

$$(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(a_{13}^2 - a_{11}a_{33}) - (a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})^2 = 0 \text{ oder}$$
$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{23}a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2 = 0.$$

3. Wenn eine Gleichung zweiten Grades ein Linienpaar darstellt, kann sie durch Koordinatenverwandlung auf die Form gebracht werden:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0.$$

Das Linienpaar besteht aus zwei (konjugierten) imaginären, oder aus zwei reellen aber zusammenfallenden, oder aus zwei reellen und verschiedenen Geraden, je nachdem

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \overset{<}{\underset{>}{=}} 0.$$

4. Wird die Gleichung (1) in Polarkoordinaten übergeführt, so ergiebt sich als Polargleichung der Kurven zweiten Grades

$$(a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi)r^2$$
$$+ 2(a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi)r + a_{33} = 0.$$

Einem gegebenen Wert von φ entsprechen im allgemeinen zwei Werte von r, d. h. jeder durch den Pol gezogene Strahl schneidet die Kurve in zwei Punkten. Der eine Schnittpunkt kann im Unendlichen liegen, wenn für den bestimmten Wert von φ der Koeffizient von r^2 zu null wird, d. h. wenn

$$a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi = 0, \text{ oder wenn}$$
$$a_{11} + 2a_{12}\operatorname{tg}\varphi + a_{22}\operatorname{tg}^2\varphi = 0.$$

Es giebt demnach im allgemeinen zwei solche Werte von φ und also zwei Richtungen, für welche der Strahl die Kurve im Unendlichen schneiden kann; diese beiden

Richtungen sind imaginär, reell aber zusammenfallend, reell und verschieden, d. h. die unendlich ferne Gerade hat mit der Kurve keinen Punkt, zwei zusammenfallende oder zwei verschiedene Punkte gemeinschaftlich, je nachdem

$$a_{12}{}^2 - a_{11}\,a_{22} \lesseqgtr 0.$$

5. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem

$$\mathbf{a_{12}{}^2 - a_{11}\,a_{22} \lesseqgtr 0.}$$

Sie stellt einen Kreis dar, wenn $a_{12} = 0$ und $a_{11} = a_{22}$.

6. Durch jeden Punkt kann im allgemeinen eine Sehne so gezogen werden, dass sie in ihm halbiert wird; ist die Kurve zweiten Grades durch die allgemeine Polargleichung gegeben, so hat eine Sehne vom Neigungswinkel φ den Pol zur Mitte, wenn die beiden Wurzeln von r von entgegengesetztem Vorzeichen und gleich sind. Dies ist der Fall, wenn

$$a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi = 0$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten, wenn

$$a_{13}\,x + a_{23}\,y = 0.$$

Giebt man nach einer Koordinatenverwandlung (Parallelverschiebung) den Koeffizienten a_{13}' und a_{23}' den Wert null, so ergeben sich daraus die Bestimmungsstücke des Mittelpunktes.

Die rechtwinkligen Koordinaten (x_0, y_0) des Mittelpunktes ergeben sich aus

$$a_{11}\,x_0 + a_{12}\,y_0 + a_{13} = 0$$
$$a_{12}\,x_0 + a_{22}\,y_0 + a_{23} = 0,$$

daher besitzt eine Linie zweiten Grades nicht mehr als einen Mittelpunkt. Seine Koordinaten sind

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{a_{22}\,a_{13} - a_{12}\,a_{23}}{a_{12}^{\;2} - a_{11}\,a_{22}} \\[2ex] y_0 = \dfrac{a_{11}\,a_{23} - a_{12}\,a_{13}}{a_{12}^{\;2} - a_{11}\,a_{22}}. \end{cases}$$

Für die Parabel ist $a_{12}^{\;2} - a_{11}\,a_{22} = 0$, sie hat daher keinen Mittelpunkt.

§ 84. Gleichungen weiterer Kurven.

A. Algebraische Kurven.

1. Neilsche Parabel $y = a\,x^{\frac{3}{2}}$.
2. Lemniskate $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$ oder
$r^2\,(r^2 - a^2 \cos 2\varphi) = 0$
3. Conchoide $x^2\,y^2 = (b + y)^2(a^2 - y^2)$ oder
$(x^2 + y^2)(y - b)^2 = a^2\,y^2$ oder $r = a + \dfrac{b}{\cos\varphi}$.
4. Cissoide $y^2(a - x) = x^3$.
5. Deskartes'sches Blatt $x^3 + y^3 = 3\,a\,x\,y$.
6. Cassinische Kurve $(x^2 + y^2)^2 - 2\,a^2(x^2 - y^2) = b^4 - a^4$.
7. Cardioide $(y^2 + x^2 - a\,x)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ oder
$r = a\,(1 + \cos\varphi)$.

B. Transcendente Kurven.

1. Logarithmische Linie $y = m\,e^{\frac{x}{a}}$.
2. Kettenlinie $y = \dfrac{m}{2}\,(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$.

3. Cykloide, beschrieben von einem bestimmten Punkt P auf dem Halbmesser eines Kreises, der auf einer Geraden rollt, (a Halbmesser des rollenden Kreises, a_1 Mittelpunktsabstand von P, $\varphi = \text{arc} \measuredangle \text{POX}$, X Berührungspunkt)

$$\begin{cases} x = a\varphi - a_1 \sin\varphi \\ y = a - a_1 \cos\varphi \end{cases}$$

4. Epycykloide, beschrieben von dem Punkt P (s. Nr. 3), wenn der Kreis auf der Aussenseite eines Kreises (Halbmesser b), rollt

$$\begin{cases} x = (a + b) \sin \frac{a\varphi}{b} - a_1 \sin \frac{a + b}{b} \varphi \\ y = (a + b) \cos \frac{a\varphi}{b} - a_1 \cos \frac{a + b}{b} \varphi. \end{cases}$$

5. Hypocykloide, beschrieben von dem Punkt P (s. Nr. 3), wenn der Kreis auf der Innenseite eines Kreises (Halbmesser b) rollt

$$\begin{cases} x = (b - a) \sin \frac{a\varphi}{b} - a_1 \sin \frac{b - a}{b} \varphi \\ y = (b - a) \cos \frac{a\varphi}{b} + a_1 \cos \frac{b - a}{b} \varphi. \end{cases}$$

Die Cykloide, ebenso die Epi- und Hypocykloide ist die gestreckte, gemeine oder verschlungene, je nachdem $a_1 \lesseqgtr a$.

6. Spirale des Archimedes (lineare Spirale) $r = a\varphi$.

7. Parabolische Spirale $r^2 = 2p\varphi$.

8. Hyperbolische Spirale $r = \frac{a}{\varphi}$.

9. Logarithmische Spirale $r = m e^{\frac{\varphi}{a}}$.

10. Kreisevolvente (Tangente = dem Bogen zwischen einem festen Punkt des Kreises und dem Berührungspunkt): $r = a\sqrt{1 + \varphi^2}$, $\psi = \varphi - \text{avc tg}\, \varphi$.