Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

II: Geometrie des Raumes.

II. Geometrie des Raums.

§ 85. Koordinaten-*) und Grössenbeziehungen.

O Ursprung, P ein Punkt im Raum, $OP = r$; α, β, γ Winkel der OP mit den positiven Teilen der Koordinatenaxen; x, y, z die Koordinaten von P.

1. Ein Punkt. Die Koordinaten des Punktes P sind die Projektionen von OP auf die Axen:

$$x = r \cos \alpha,\ y = r \cos \beta,\ z = r \cos \gamma,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

2. Zwei Punkte. (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2).

$$OP_1 = r_1,\ OP_2 = r_2;$$

$$\cos(r_1, r_2) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2}.$$

Stehen r_1 und r_2 senkrecht aufeinander, so ist

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0.$$

Entfernung $e = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$.

Für Punkt (x, y, z), der $P_1 P_2$ im Verhältnis $m : n$ teilt ($P_1 P : P P_2 = m : n$), ist

$$x = \frac{n x_1 + m x_2}{m + n};\ y = \frac{n y_1 + m y_2}{m + n};\ z = \frac{n z_1 + m z_2}{m + n}.$$

3. Projektionen. Ist l eine Strecke, f eine Fläche, sind ferner l_1, l_2, l_3, bezw. f_1, f_2, f_3 ihre Projektionen auf die Koordinatenebenen, so ist

1. $l_1{}^2 + l_2{}^2 + l_3{}^2 = 2\,l^2$.
2. $f_1{}^2 + f_2{}^2 + f_3{}^2 = f^2$.

$f_1 = f \cos\alpha$, $f_2 = f \cos\beta$, $f_3 = f \cos\gamma$; α, β, γ Neigungswinkel der f gegen die Koordinatenebenen.

---

*) Es sind stets, wofern nichts anders bemerkt ist, rechtwinklige Koordinaten vorausgesetzt.

4. Inhalt V der dreiseitigen Pyramide.

1. Eine Ecke im Ursprung, die drei andern Ecken sind (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3).

$$V = \frac{1}{6}[x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_2(y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1)]$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

2. Liegt die erste Ecke nicht im Ursprung, sondern im Punkt (x, y, z), so ergiebt sich V, indem man das Koordinatensystem parallel verschiebt, so dass der Ursprung mit (x, y, z) zusammenfällt; man hat alsdann im vorigen Ausdruck

statt x_1, y_1, z_1 zu setzen $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$

Liegt (x, y, z) in derselben Ebene* mit den drei übrigen Punkten, so ist $V = 0$; dies ist die Gleichung der Ebene durch jene drei Punkte.

§ 86. Aenderung des Koordinatensystemes.

1. Parallele Verschiebung der Axen; a, b, c Koordinaten des neuen Ursprungs.

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'.$$

2. Drehung um den Ursprung.

OX' bilde mit OX, OY, OZ die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$,
OY' „ „ „ „ „ „ „ $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$,
OZ' „ „ „ „ „ „ „ $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$.

Schreibt man der Kürze halber die Buchstaben der Winkel für ihre Cosinus, so ist:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' & x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' & y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' & z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z. \end{aligned}$$

Zwischen den Cosinus bestehen die Beziehungen

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \qquad \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$
$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1$$
$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \qquad \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1$$
$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\gamma_3 = 0 \qquad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$$
$$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0 \qquad \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0$$
$$\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0 \qquad \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0.$$

3. Polarkoordinaten. $OP = r$, φ Winkel zwischen OP und der XYebene, gezählt von der letzteren gegen die $+Z$ Axe hin (von -90^0 bis $+90^0$); ψ ist der Winkel, den die Ebene ZOP mit der Ebene ZOX bildet, gezählt von der $+X$axe aus im positiven Drehungssinn von $0^0 - 360^0$.

Uebergang von rechtwinkligen Koordinaten zu Polarkoordinaten und umgekehrt:

$$1.\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \sin\varphi = \frac{z}{r},\ \cos\psi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$
$$\sin\psi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$2.\ \begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\cos\varphi\sin\psi \\ z = r\sin\varphi. \end{cases}$$

§ 87. Allgemeine Sätze.

1. Eine Fläche ist durch eine Gleichung zwischen x, y und z bestimmt. Die Bedingung dafür, dass der Punkt (x_1, y_1, z_1) auf der Fläche liegt, deren Gleichung $F(x, y, z) = 0$ ist, ist $F(x_1, y_1, z_1) = 0$.

2. Eine Linie ist durch zwei Gleichungen in x, y und z bestimmt; die Linie ist die Schnittlinie der durch jene zwei Gleichungen dargestellten Flächen. Jeder Punkt, dessen Koordinaten die beiden Gleichungen $F(x, y, z) = 0$ und $f(x, y, z) = 0$ befriedigen, liegt auf der Schnittlinie der durch die beiden Gleichungen dargestellten Flächen.

3. Setzt man in der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ eine der Koordinaten, z. B. z, gleich null, so erhält man die Gleichung der Schnittlinie der Fläche mit der Ebene der andern Koordinaten, z. B. der XYebene.

4. Eliminiert man aus den Gleichungen zweier Flächen eine Koordinate, so erhält man die Gleichung der Projektion der Schnittlinie beider Flächen auf die Ebene der beiden andern Koordinaten. Bestimmt man aus den Gleichungen dreier Flächen die gemeinschaftlichen Werte von x, y, z, so stellen diese die Koordinaten der Schnittpunkte der drei Flächen dar.

5. $F(x, y, z) + \lambda f(x, y, z) = 0$ giebt die Gleichung einer Fläche an, welche durch die Schnittlinie oder die gemeinschaftlichen Punkte der beiden Flächen $F(x, y, z) = 0$ und $f(x, y, z) = 0$ geht.

§ 88. Die Ebene.

a, b, c Abschnitte der Ebene auf den Koordinatenaxen; α, β, γ die Winkel, welche das Lot vom Ursprung auf die Ebene mit den Axen bildet, p die Länge dieses Lotes.

1. Gleichungsformen für die Ebene:

1. allgemeine Form $Ax + By + Cz + D = 0$ (E)

2. " $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$

3. " $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$

(Normalform N)

Spur in der XYebene $Ax + By + D = 0$

" " " YZ " $By + Cz + D = 0$

" " " ZX " $Ax + Cz + D = 0$

Axenabschnitte:

$$a = -\frac{D}{A},\; b = -\frac{D}{B},\; c = -\frac{D}{C}.$$

Lot vom Ursprung:

$$p = a\cos\alpha = b\cos\beta = c\cos\gamma = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

(Das Vorzeichen der Wurzel wird so gewählt, dass p positiv wird.)

Winkel des Lotes p mit den Axen aus:

$$\cos\alpha = \frac{p}{a} = -\frac{Ap}{D} = -\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \text{ u. s. f.}$$

2. Besondere Fälle:

$$1. \begin{cases} x = a & \text{Ebene parallel zur YZebene,} \\ y = b & \text{„ „ „ ZX „} \\ z = c & \text{„ „ „ XY „} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} Ax + By + D = 0 & \text{Ebene parallel zur Zaxe} \\ Ax + Cz + D = 0 & \text{„ „ „ Y „} \\ By + Cz + D = 0 & \text{„ „ „ X „} \end{cases}$$

$$3.\ Ax + By + Cz = 0 \quad \text{„ durch den Ursprung}$$

$$4. \begin{cases} Ax + By = 0 & \text{„ „ die Zaxe} \\ Ax + Cz = 0 & \text{„ „ „ Y „} \\ By + Cz = 0 & \text{„ „ „ X „} \end{cases}$$

3. Ebene durch den Punkt (x_1, y_1, z_1)

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

4. Ebene durch drei Punkte (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2,)$ (x_3, y_3, z_3)

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \text{ wobei}$$

$$A = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(s. auch § 85_4.)

5. Abstand e eines Punktes (x_1, y_1, z_1) von der Ebene E oder N (s. 1.):

$$e = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p$$

6. Zwei Ebenen $Ax + By + Cz + D = 0$ und $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$;

1. sie sind parallel, wenn $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$,

also Gleichungen zweier paralleler Ebenen

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ Ax + By + Cz + D_1 = 0 \end{cases} \text{oder}$$

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p_1 = 0 \end{cases}$$

2. Abstand zweier paralleler Ebenen

$$\pm \frac{D - D_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = p - p_1$$

3. Winkel φ zweier Ebenen

$$\cos\varphi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\pm\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1{}^2)}}$$

4. Sie sind senkrecht, wenn $\cos\varphi = 0$, d. h. wenn

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$$

7. Ebenenbüschel. Sind $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ die Gleichungen zweier Ebenen (1) u. (2) in Normalform, so ist die Gleichung einer dritten Ebene (3) die durch die Schnittlinie der beiden ersten geht

$$A_1 - \lambda A_2 = 0.$$

Sind (3, 1), (3, 2) die Neigungswinkel zwischen (3) und den beiden gegebenen Ebenen, so ist

$$\lambda = \frac{\sin(3, 1)}{\sin(3, 2)}.$$

Die Halbierungsebenen der von den beiden Ebenen gebildeten Keile haben daher die Gleichung

$$A_1 \mp A_2 = 0$$

8. Drei Ebenen durch eine Gerade.

Damit drei Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$ sich in derselben Geraden schneiden ist notwendig und hinreichend, dass es drei Zahlfaktoren λ_1, λ_2, λ_3 giebt, für welche die Identität besteht

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 = 0$$

9. Vier Ebenen durch einen Punkt. Damit vier Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$, $E_4 = 0$ durch einen und denselben Punkt gehen, ist notwendig und hinreichend, dass die Idendität besteht

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 E_4 = 0.$$

§ 89. Gerade Linie; gerade Linie und Ebene.

1. Jede Gerade ist durch zwei unabhängige Gleichungen ersten Grades zwischen x, y und z bestimmt.

Allgemeine Gleichungsformen:

$$(1) \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = m x + b \\ z = n x + c. \end{cases}$$

Die Koordinaten der Spuren in der XY-, YZ-, XZebene ergeben sich aus bezw. $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

2. Besondere Fälle.

1. $\begin{cases} y = m x + b \\ z = c \end{cases}$ Gerade parallel zur XYebene.

$\begin{cases} y = b \\ z = n x + c \end{cases}$ Gerade parallel zur XZebene.

$\begin{cases} z = p y + q \\ x = a \end{cases}$ Gerade parallel zur YZebene.

2. $\begin{cases} y = b \\ z = c \end{cases}$ Gerade parallel zur Xaxe;

$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Xaxe.

$$\begin{cases} z = c \\ x = a \end{cases}$$ Gerade parallel zur Yaxe;

$$\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$ Yaxe.

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$ Gerade parallel zur Zaxe;

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$ Zaxe.

3. $$\begin{cases} y = mx \\ z = nx \end{cases}$$ Gerade durch den Ursprung.

3. Winkel mit den Axen, α, β, γ. Wenn die Gleichungen der Geraden sind

$$y = mx + b,\ z = nx + c, \text{ so ist}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}},\quad \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}.$$

4. Gerade bestimmt durch einen Punkt (x_1, y_1, z_1) und Richtung (α, β, γ)

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}.$$

5. Gerade durch zwei Punkte (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

6. Zwei gerade Linien.

$$\begin{cases} y = mx + b \\ z = nx + c \end{cases} \qquad \begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ z = n_1 x + c_1. \end{cases}$$

1. Die Geraden schneiden sich, wenn
$(b - b_1)(n - n_1) = (c - c_1)(m - m_1)$ (s. u. 5).
2. Sie sind parallel, wenn $m_1 = m$, $n_1 = n$.

3. Der Winkel φ der Geraden ergiebt sich aus

$$\cos\varphi = \frac{1 + m m_1 + n n_1}{\sqrt{(1 + m^2 + n^2)(1 + m_1{}^2 + n_1{}^2)}}.$$

4. Sie sind senkrecht, wenn $\cos\varphi = 0$, also wenn $1 + m m_1 + n n_1 = 0$.

5. Kürzester Abstand zweier Geraden

$$e = \frac{(b - b_1)(n - n_1) - (c - c_1)(m - m_1)}{\sqrt{(m n_1 - m_1 n)^2 + (m - m_1)^2 + (n - n_1)^2}}, \text{ (s. o. 1.)}.$$

6. Abstand e zweier paralleler Geraden

$$\begin{cases} y = mx + b \\ z = nx + c \end{cases} \quad \begin{matrix} y = mx + b_1 \\ z = nx + c_1. \end{matrix}$$

$$e = \frac{\sqrt{F^2 + G^2 + H^2}}{1 + m^2 + n^2}, \text{ wobei}$$

$$F = (b - b_1)m + (c - c_1)n$$
$$G = (c - c_1)mn - (b - b_1)(1 + n^2)$$
$$H = (b - b_1)mn - (c - c_1)(1 + m^2).$$

7. Gerade und Ebene.

$$\begin{cases} y = mx + b \\ z = nx + c \end{cases} \text{ und } Ax + By + Cz + D = 0.$$

1. Die Gerade liegt in der Ebene, wenn
$A + Bm + Cn = 0$ und $Bb + Cc + D = 0$.

2. Die Gerade ist parallel der Ebene, wenn
$$A + Bm + Cn = 0.$$

3. Winkel ω zwischen der Geraden und der Ebene aus

$$\sin\omega = \frac{A + Bm + Cn}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(1 + m^2 + n^2)}}.$$

4. Die Gerade ist senkrecht zur Ebene, wenn

$$\frac{B}{A} = m, \frac{C}{A} = n.$$

8. Ebene durch Punkt (x_1, y_1, z_1) senkrecht zur Geraden

$$y = mx + b, \quad z = nx + c$$

$$(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0.$$

9. Gerade durch Punkt (x_1, y_1, z_1) senkrecht zur Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\begin{cases} y - y_1 = \dfrac{B}{A}(x - x_1) \\ z - z_1 = \dfrac{C}{A}(x - x_1) \end{cases}$$

10. Ebene durch zwei sich schneidende gerade Linien (s. Nr. 6 1)

$$\begin{cases} y = mx + b \\ z = nx + c \end{cases} \qquad \begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ z = n_1 x + c_1. \end{cases}$$

$$[m(c - c_1) - n(b - b_1)]x - (c - c_1)y + (b - b_1)z = bc_1 - b_1 c$$

oder $$\frac{y - mx - b}{z - nx - c} = \frac{b - b_1}{c - c_1} \text{ oder } = \frac{m - m_1}{n - n_1}.$$

Ebene durch zwei parallele Gerade

$$\frac{y - mx - b}{z - nx - c} = \frac{b - b_1}{c - c_1}.$$

11. Ebene durch eine Gerade $y = mx + b$, $z = nx + c$ parallel zu einer 2. Geraden $y = m_1 x + b_1$, $z = n_1 x + c_1$

$$(mn_1 - m_1 n)x + (n - n_1)y - (m - m_1)z = b_1(n - n_1) - c_1(m - m_1).$$

12. Ebene durch einen Punkt (x_1, y_1, z_1) parallel zu zwei Geraden

$$(mn_1 - m_1 n)(x - x_1) + (n - n_1)(y - y_1) - (m - m_1)(z - z_1) = 0.$$

§ 90. Krumme Flächen.

1. Cylinderflächen.

1. Die Leitlinie ist einfach gekrümmt, sie liegt in der XYebene, ihre Gleichung ist

$$1.\ F(x_0, y_0) = 0.$$

Die Gleichungen der erzeugenden Mantellinie sind

$$2.\ y = mz + y_0,\ x = pz + x_0,$$

dann ist die Gleichung der Cylinderfläche das Eliminationsresultat von x_0 und y_0 aus 1. und 2., also

$$3.\ F(x - pz, y - mz) = 0.$$

2. Die Leitlinie sei eine doppelt gekrümmte Kurve, ihre Gleichungen

$$(1) \begin{cases} \varphi\,(x, z) = 0 \\ \psi\,(y, z) = 0, \end{cases}$$

die Gleichungen der erzeugenden Mantellinie seien

$$\begin{cases} y = mz + y_0 \\ x = pz + x_0. \end{cases}$$

Ist (x_1, y_1, z_1) der Schnittpunkt der Mantellinie mit der Leitlinie, so ist

$$\begin{cases} \varphi\,(x_1, z_1) = 0 \\ \psi\,(y_1, z_1) = 0 \end{cases} \text{u.} \begin{cases} y_1 = mz_1 + y_0 \\ x_1 = pz_1 + x_0. \end{cases}$$

Die Elimination von (x_1, y_1, z_1) aus diesen vier Gleichungen liefert die Gleichung $F\,(x_0, y_0) = 0$ der XY Spur der Fläche, aus ihr folgt

$$F\,(x - pz, y - mz)$$

als Gleichung der Zylinderfläche.

2. Kegelflächen.

1. Die Leitlinie liege in der XY Ebene, ihre Gleichung sei $F\,(x, y) = 0$, (x_0, y_0) ein Punkt derselben, (f, g, h) die Spitze des Kegels, dann folgt aus den Gleichungen einer Mantellinie

$$(1)\ \frac{y - g}{y_0 - g} = -\frac{z - h}{h}, \frac{x - f}{x_0 - f} = -\frac{z - h}{h}, \text{ und aus}$$

$$(2)\ F\,(x_0, y_0) = 0.$$

Durch Elimination von x_0 und y_0 als Gleichung der Kegelfläche

$$F\left(\frac{fz - hx}{z - h}, \frac{gz - hy}{z - h}\right) = 0.$$

2. Ist die Leitlinie doppelt gekrümmt, (x_1, y_1, z_1) ein Punkt derselben und sind $\varphi(x, z) = 0$ und $\psi(y, z) = 0$ ihre Gleichungen, so erhält man aus den Gleichungen der Verbindungslinie der Spitze (f, g, h) mit (x_1, y_1, z_1)

$$\frac{y - g}{y_1 - g} = \frac{z - h}{z_1 - h}, \quad \frac{x - f}{x_1 - f} = \frac{z - h}{z_1 - h}$$

und aus den Gleichungen $\varphi(x_1, y_1) = 0$, $\psi(x_1, y_1) = 0$ Durch Elimination von (x_1, y_1, z_1) die Gleichung der Fläche; sie hat die Form

$$F\left(\frac{fz - hx}{z - h}, \frac{gz - hy}{z - h}\right) - 0.$$

Legt man die Zaxe durch die Spitze, dann geht die Gleichung über in

$$F\left(\frac{hx}{h - z}, \frac{hy}{h - z}\right) = 0,$$

legt man den Ursprung in die Spitze, so erhält man, z für $h - z$ setzend,

$$F\left(\frac{hx}{z}, \frac{hy}{z}\right) = 0.$$

S c h i e f e r K r e i s k e g e l. Spitze im Ursprung, Leitlinie im Abstand h parallel zur XY-Ebene, (a, b, h) Koordinaten des Kreismittelpunktes, r Halbmesser

$$\left(\frac{hx}{z} - a\right)^2 + \left(\frac{hy}{z} - b\right)^2 = r^2.$$

3. D r e h f l ä c h e n (Rotationsflächen).

1. Die Drehaxe liege in der Zaxe, die Gleichung des in der XZebene liegenden Meridians sei $x = f(z)$, dann ist die Gleichung der Drehfläche

$$\sqrt{x^2 + y^2} = f(z).$$

2. Gerader K r e i s k e g e l, Zaxe Drehaxe, Spitze im Ursprung

$$x^2 + y^2 = p^2 z^2.$$

3. Drehungshyperboloid:

Einschaliges, erzeugt durch Drehung der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2}(z^2 + c^2) \text{ oder}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Zweischaliges, erzeugt durch Drehung der Hyperbel $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ um die Zaxe

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2}(z^2 - c^2) \text{ oder}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

Ist $a = c$, so heissen die Hyperboloide gleichseitig. Der zugehörige Asymptotenkegel hat in beiden Fällen die Gleichung

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 z^2}{c^2}.$$

4. Drehungsparaboloid, erzeugt durch Drehung der Parabel $x^2 = 2p\,z$

$$x^2 + y^2 = 2p\,z.$$

4. Schraubenlinie mit Axe in der Zaxe, h Ganghöhe

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = \dfrac{ht}{2\pi} = \operatorname{arc} t \end{cases}$$

und Schraubenfläche, ein die Zaxe schneidender und zu dieser senkrechter Strahl gleitet der Schraubenlinie entlang,

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{2\pi z}{h}.$$

§ 91. Flächen zweiten Grades.

1. Ellipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$

Kugel, Koordinaten des Mittelpunktes a, b, c

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Mittelpunkt im Ursprung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

2. Einschaliges Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

3. Zweischaliges Hyperboloid

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

4. Elliptisches Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2z}{c} = 0.$$

5. Hyperbolisches Paraboloid

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{2z}{c} = 0.$$

6. Kegel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

7. Elliptischer Cylinder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

8. Hyperbolischer Cylinder

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

9. Parabolischer Cylinder

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2z}{c} = 0.$$

10. Das System von zwei Ebenen

$$(Ax+By+Cz+D)(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0.$$

11. Jede Gleichung von der Form

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

stellt eine Kugel dar.

12. Jede Gleichung von der Form

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz=0$$

stellt einen Kegel dar.
