Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

Höhere Analyse.

Höhere Analysis.

A. Differentialrechnung.

§ 92. Funktion; unendlich kleine Grössen; Differentialquotient.

Funktionen.

1. Eine Zahl von unveränderlichem Wert 3, 5, a, 3a — b ...) heisst eine Konstante; eine Zahl, welche alle Werte der Zahlenreihe annehmen kann, heisst eine Veränderliche (in der Regel bezeichnet mit t, x, y, z).

2. Eine Zahl, welche von einer oder mehreren Veränderlichen abhängt, heisst eine Funktion derselben. Der Inhalt eines Kreises, einer Kugel ist eine Funktion des Halbmessers; derjenige eines Rechtecks, eines Quaders ist eine Funktion von Länge und Breite, bezw. Länge, Breite und Höhe. Mit dem Wert der unabhängigen Veränderlichen ändert sich der Wert der Funktion, der abhängigen Veränderlichen.

Bezeichnung der Funktion: $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ und dergleichen,

$y = f(x)$ ist eine Funktion von einer unabhängigen Veränderlichen x,

$z = f(x, y)$ ist eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen, x und y,

$u = f(x, y, z)$ ist eine Funktion von drei unabhängigen Veränderlichen, x, y und z.

3. $y = f(x)$, $z = f(x, y)$ u. s. f. heissen entwickelte (explizite) Funktionen.

$F(x, y) = 0$, $F(x, y, z) = 0$ u. s. f. heissen unentwickelte (implizite) Funktionen.

4. Kommt jede unabhängige Veränderliche nur als Summand, Subtrahend, Faktor, Divisor oder als Basis einer ganzen oder gebrochenen Potenz vor, so heisst die Funktion algebraisch. Es ist z. B. y eine algebraische Funktion von x, wenn es gleich $a \pm x$, ax, $\frac{a}{x}$, x^a, $\sqrt[a]{x}$, $a + bx + cx^2$, $\sqrt{a^2 - x^2}$ u. s. f. ist. In allen übrigen Fällen heisst die Funktion transcendent; z. B. $y = a^x$, $y = \log x$, $y = \sin x$ u. s. f. sind transcendente Funktionen.

5. Eine Funktion heisst stetig zwischen x_0 und x_1, wenn für alle Werte zwischen x_0 und x_1 einem unendlich kleinen Wachstum von x auch ein unendlich kleines Wachstum von f (x) entspricht.

Unendlich kleine Grössen und Grenzwerte.

6. Wenn eine veränderliche Grösse sich der Null nähert und dabei einen Wert annimmt, der kleiner ist als jede angebbare Grösse, so nennt man sie unendlich klein.

7. Zwei unendlich kleine Grössen heissen von derselben Ordnung, wenn ihr Quotient gegen einen von null verschiedenen, endlichen Grenzwert konvergiert. Ist a eine endliche, γ eine unendlich kleine Grösse, so ist $a\gamma$ von derselben Ordnung wie γ.

8. Ist δ von der ersten Ordnung, so ist γ von der nten Ordnung, wenn der Quotient $\frac{\gamma}{\delta^n}$ gegen einen endlichen, von null verschiedenen Wert konvergiert, also wenn

$$\lim \frac{\gamma}{\delta^n} = q.$$

9. Ist eine endliche Grösse Γ gleich der Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen $\gamma_1, \gamma_2 \ldots$, so bleibt Γ unverändert, wenn jede Grösse γ um ein Unendlich kleines ε von höherer Ordnung vermehrt wird. Ist also

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots = \lim \Sigma \gamma, \text{ so ist auch}$$

$$\Gamma = (\gamma_1 + \varepsilon_1) + (\gamma_2 + \varepsilon_2) + \ldots = \lim \Sigma (\gamma + \varepsilon).$$

10. Es ist

$$1.\ \lim (1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}}_{\delta = 0} = e, \quad \lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m_{m = \infty} = e;$$

$$2.\ \lim \frac{a^\delta - 1}{\delta}\Bigg|_{\delta = 0} = \frac{\log a}{\log e}.$$

$$3.\ \lim \frac{\sin \delta}{\delta}\Bigg|_{\delta = 0} = 1; \quad \lim \frac{\operatorname{tg} \delta}{\delta}\Bigg|_{\delta = 0} = 1.$$

$$4.\ \lim \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m\Bigg|_{m = \infty} = e^x.$$

11. Differential und Differentialquotient.

$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\overline{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}$$

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = \frac{df(x)}{dx}$$

$$= f'(x) = D f(x).$$

dx heisst das Differential von x, $df(x) = f'(x)\, dx$ das Differential von f (x). $\frac{df(x)}{dx}$ oder $f'(x)$ heisst die erste Ableitung oder der erste Differentialquotient von f(x).

Ist C eine von x unabhängige Konstante, so ist $\frac{dC}{dx} = 0$.

Die Ableitung des ersten Differentialquotienten giebt den zweiten u. s. f.; es ist also

$\frac{d f'(x)}{d x} = \frac{d^2 y}{d x^2} = y'' = f''(x) = D^2 f(x)$ die zweite Ableitung von $f(x)$.

§ 93. Allgemeine Formeln über Differentiation.

Es seien u, v, w Funktionen von x, A, B, C Konstanten.

1. $\frac{d f(u)}{d x} = \frac{d f(u)}{d u} \cdot \frac{d u}{d x}$

2. $d(A u + B v + C w) = A\, d u + B\, d v + C\, d w$

$$\frac{d(A u + B v + C w)}{d x} = A \frac{d u}{d x} + B \frac{d v}{d x} + C \frac{d w}{d x}$$
$$= A u' + B v' + C w'$$

3. $d(u v) = v\, du + u\, dv$; $d(uvw) = vw\, du + uw\, dv + uv\, dw$

$$\frac{d(uv)}{dx} = u' v + u v' = uv \left(\frac{1}{u} . u' + \frac{1}{v} v'\right)$$

$$\frac{d(uvw\ldots)}{dx} = uvw \ldots \left(\frac{1}{u} u' + \frac{1}{v} v' + \frac{1}{w} w' + \ldots\right)$$

4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}$

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{d x} = \frac{u' v - u v'}{v^2}$$

5. Bezeichnet man die nte Ableitung von u mit $u^{(n)}$ so ist:

$$\frac{d^n(A u + B v)}{d x^n} = A u^{(n)} + B v^{(n)}$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)} v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v^{(1)} + \binom{n}{2} u^{(n-2)} v^{(2)} + \ldots$$
$$+ \binom{n}{1} u^{(1)} v^{(n-1)} + u v^{(n)}$$

6. Ist $u = f(z)$, $z = \varphi(y)$, $y = \psi(x)$, dann ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{dfz}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

7. Sind x und y Funktionen von t, so ist:

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = y' : x'$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3}$

8. Betrachtet man bei einer Funktion mehrerer unabhängiger Veränderlicher $u = f(x, y, z)$ irgend eine derselben, z. B. x, als veränderlich, die übrigen als konstant, so heisst die Ableitung der Funktion nach dieser Veränderlichen die partielle Ableitung nach x, sie wird mit $\frac{\delta u}{\delta x}$ bezeichnet.

Das totale Differential von u ist gleich der Summe der partiellen Differentiale nach sämtlichen Veränderlichen:

$$du = \frac{\delta u}{\delta x} dx + \frac{\delta u}{\delta y} dy + \frac{\delta u}{\delta z} dz$$

9. Sind x, y, z Funktionen von t, dann ist

$$\frac{df(x, y, z)}{dt} = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\delta f}{\delta z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

10. Es ist

$$\frac{\delta \frac{\delta u}{\delta x}}{\delta x} = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}; \quad \frac{\delta \frac{\delta u}{\delta x}}{\delta y} = \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y}; \quad \frac{\delta \frac{\delta u}{\delta y}}{\delta x} = \frac{\delta^2 u}{\delta y \delta x};$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 u}{\delta y \delta x}$$

11. $d^2 u = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} dx^2 + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} dy^2 + \frac{\delta^2 u}{\delta z^2} dz^2$

$$+ 2 \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} dx dy + 2 \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta z} dx dz + 2 \frac{\delta^2 u}{\delta y \delta z} dy dz$$

symbolisch:

$$d^2u = \left(\frac{\delta u}{\delta x}dx + \frac{\delta u}{\delta y}dy + \frac{\delta u}{\delta z}dz\right)^{(2)},$$

wofern im Zähler jeden Gliedes δu^2 durch $\delta^2 u$ ersetzt wird. — Der Satz gilt ebenso auch für das Differential nter Ordnung.

12. Unentwickelte (implizite) Funktionen. Ist $f(x, y) = 0$, so ist

1) $\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$, daher

$$2) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}}$$

Durch Differenzieren von 1) erhält man eine Gleichung, aus der sich $\frac{d^2y}{dx^2}$ bestimmt:

$$3) \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + 2\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

13. Ist $f(x, y, z) = 0$, so kann z als Funktion von x und y betrachtet werden, dann ist

1) $\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta x} = 0$, hieraus folgt $\frac{\delta z}{\delta x}$;

2) $\frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta y} = 0$, " " $\frac{\delta z}{\delta y}$.

Differenziert man Gleichung 1) nach x, dann auch nach y, ferner Gleichung 2) nach y, so ergeben sich Gleichungen, aus welchen man $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}$, $\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$ erhält.

14. Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.

$$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2x}{dy^2} : \left(\frac{dx}{dy}\right)^3$$

§ 94. Spezielle Formeln.

1. Das Differential und der Differentialquotient einer Konstanten ist null.

2. $\frac{dx^n}{dx} = n\,x^{n-1}$

3. $\frac{d^r(x^n)}{dx^r} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\,x^{n-r},\ r \leqq n$

---

4. $\frac{da^x}{dx} = a^x\,la;\ \frac{d\,a^{mx}}{dx} = a^{mx}\,m\,l\,a;\ \frac{de^x}{dx} = e^x$

5. $\frac{d^r(a^x)}{dx^r} = a^x(l\,a)^r$

---

6. $\frac{d\overset{a}{\log}x}{dx} = \frac{1}{x}\overset{a}{\log}e = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{la} = \frac{M}{x}$ (s. § 29_7.)

$\frac{d\,l x}{dx} = \frac{1}{x}$

7. $\frac{d^r(\log x)}{dx^r} = (-1)^{r-1}(r-1)!\,\frac{\log e}{x^r}$

---

8. $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

9. $\frac{d^r\sin x}{dx^r} = \sin\left(x + \frac{r\pi}{2}\right)$

10. $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

11. $\frac{d^r\cos x}{dx^r} = \cos\left(x + \frac{r\pi}{2}\right)$

12. $\frac{d \operatorname{tg} x}{d x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(= \sec^2 x)$

(Für höhere Ableitungen kein einfaches Bildungsgesetz.)

13. $\frac{d \operatorname{ctg} x}{d x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $(= -\operatorname{cosec}^2 x)$.

---

14. $\frac{d \operatorname{arc} \sin x}{d x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $\frac{d \operatorname{arc} \cos x}{d x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{d x} = \frac{1}{1+x^2}$

17. $\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x}{d x} = -\frac{1}{1+x^2}$

18. $\frac{d \operatorname{arc} \sec x}{d x} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

19. $\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x}{d x} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

§ 95. Die Taylor'sche und die Mac Laurin'sche Reihe.

1. Taylor'sche Reihe:

$$f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\mu h),$$

wofern μ positiv und < 1, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x) \ldots$ endliche und bestimmte Werte haben und wofern $f^{(n+1)}(x)$ endlich und stetig für alle Werte zwischen x und $x+h$.

Andere Formen des Restgliedes:

$$\frac{h^{n+1}(1-\Theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x+\Theta h),\ \Theta \text{ echter Bruch;}$$

$$\frac{h^n}{n!}\left[f^{(n)}(x+\Theta h) - f^{(n)}(x)\right]$$

Für $x=a$ und $h=a-x$ ergiebt sich:

$$2.\ f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$
$$+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}\big(a+\mu(x-a)\big).$$

Hiebei muss $f^{(n+1)}(x')$ für alle Werte von x' zwischen a und x endlich und stetig bleiben.

Für $a=0$ ergiebt sich:

3. Mac Laurin'sche Reihe:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$
$$+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\mu x),$$

wofern $f(x)$ und seine Ableitungen für $x=0$ endlich und stetig bleiben.

Andere Form des Restgliedes:

$$\frac{x^{n+1}(1-\Theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\Theta x).$$

Wird $f(x)$ oder eine seiner Ableitungen für $x=0$ unendlich oder unstetig, so kann $f(x)$ nicht mehr vermittelst der Mac Laurin'schen Reihe entwickelt werden. In diesem Fall ist 2. anzuwenden.

4. Taylor's Reihe für zwei Veränderliche.

$$x+ht=p,\ y+kt=q,\ f(p,q)=U,\ f(x,y)=u,$$

$$f(x+h,\ y+k)=u+\frac{\delta u}{\delta x}h+\frac{\delta u}{\delta y}k+\frac{1}{2!}\left(\frac{\delta u}{\delta x}h+\frac{\delta u}{\delta y}k\right)^{(2)}$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\delta u}{\delta x}h+\frac{\delta u}{\delta y}k\right)^{(3)}+\ldots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\delta u}{\delta x}h+\frac{\delta u}{\delta y}k\right)^{(n)}+R.$$

(s. § 93 11.)

$$R=\frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\delta U}{\delta p}h+\frac{\delta U}{\delta q}k\right)^{(n)}-\left(\frac{\delta u}{\delta x}h+\frac{\delta u}{\delta y}k\right)^{(n)}\right],$$
$$(p=x+\Theta h,\ q=y+\Theta k).$$

§ 96. Werte unbestimmter Ausdrücke.

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 \cdot \infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty,\ \infty - \infty.$$

1. Nimmt $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$ den Wert $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ an,

so ist $$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)};$$

wird auch $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, so wird das Verfahren wiederholt und es ist, wenn $f^{(n+1)}(a)$ und $\varphi^{(n+1)}(a)$ diejenigen Ableitungen sind, welche zuerst nicht gleichzeitig zu 0 oder zu ∞ werden:

$$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{\varphi^{(n+1)}(a)}$$

2. Ist $f(x) \cdot \varphi(x) = 0 \cdot \infty$ für $x = a$, so ist:

$$f(x) \cdot \varphi(x) = f(x) : \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Dieser letztere Ausdruck nimmt für $x = a$, die Form $\frac{0}{0}$ an, sein Wert ergiebt sich nach 1.

3. Nimmt der Ausdruck $(f(x))^{\varphi(x)}$ für $x = a$ eine der Formen 0^0, ∞^0, 1^∞ an, so setzt man $(f\ x))^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\, l\, f(x)}$ und untersucht nach 1. oder 2. den Ausdruck $\varphi(x)\, l f(x)$.

4. Führen die angegebenen Mittel stets wieder zu demselben unbestimmten Ausdruck, so muss man zu besonderen Hilfsmitteln greifen. Man kann dann für x zunächst $a + h$ setzen, den Ausdruck umformen und wenn möglich, vereinfachen, worauf sich für $h = 0$ der gesuchte Wert ergeben kann.

5. Wenn $f(x) - \varphi(x)$ für $x = a$ die unbestimmte

Form $\infty - \infty$ annimmt, so suche man den Ausdruck in ein Produkt oder in einen Bruch zu verwandeln, was z. B. folgendermassen geschehen kann:

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\varphi(x)}}$$

Der Wert hiefür wird nach dem Vorausgegangenen ermittelt.

§ 97. Grösste und kleinste Werte von Funktionen.

1. Die Funktion $y = f(x)$ erreicht für $x = a$
ein Maximum, wenn $f(a \pm h) - f(a) < 0$,
„ Minimum, „ $f(a \pm h) - f(a) > 0$,
wobei h sich der Null unbegrenzt nähert.

2. Bei zunehmendem x ist
f(x) wachsend, wenn $f'(x) > 0$,
f(x) abnehmend, „ $f'(x) < 0$.

3. $y = f(x)$ erreicht für $x = a$
ein Maximum, wenn $f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0$,
„ Minimum, „ $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$;
allgemein: die Funktion $y = f(x)$ erreicht für $x = a$ ein Maximum, wenn die niederste für $x = a$ nicht verschwindende Ableitung von f(x) von gerader Ordnung und negativ, ein Minimum, wenn dieselbe positiv ist.

Ist die niederste für $x = a$ nicht verschwindende Ableitung von ungerader Ordnung (z. B. von erster), so ist f(a) weder ein Maximum noch ein Minimum.

Um die Stelle und den Wert des Maximums oder Minimums zu finden, wird y' gebildet, gleich null gesetzt und nach x aufgelöst. Nun wird y'' gebildet, es werden die gefundenen Werte von x eingesetzt und aus dem negativen oder positiven Ergebnis bestimmt, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt. Durch Einsetzen der gefundenen Werte von x in $y = f(x)$ ergiebt sich der Wert des Maximums oder Minimums selbst.

4. Funktion zweier unabhängigen Veränderlichen, $z = f(x, y)$.

Man bestimme x und y aus

$$1.\quad \frac{\delta f}{\delta x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\delta f}{\delta y} = 0.$$

Die erhaltenen Werte müssen der Gleichung genügen:

$$2.\quad \left(\frac{\delta f}{\delta x\, \delta y}\right)^2 - \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} < 0.$$

Es findet dann Maximum oder Minimum statt, je nachdem

$$3.\quad \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \quad \text{und} \quad \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$$

für jene Werte von x und y beide gleichzeitig < 0 oder > 0 sind.

B. Integralrechnung.

§ 98. Bezeichnung und Erklärung.

F(x) heisst das Integral von $f(x)\,dx$, geschrieben $\int f(x)\,dx$, wenn

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x);$$

es ist also dann $\int f(x)\,dx = F(x) + C$,
wobei C eine unbestimmte Konstante bedeutet; ferner ist

$$\frac{d\int f(x)\,dx}{dx} = f(x).$$

§ 99. Integration einfacher Funktionen; Grundformeln.

Bei sämtlichen nachstehenden Formeln ist rechts die unbestimmte Konstante zu ergänzen.

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ für $n \lessgtr -1$

$\int (a + b\,x)^n = \frac{(a + b\,x)^{n+1}}{(n+1)\,.\,b}$.

2. $\int \frac{dx}{x} = l\,x$.

3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{l\,a}$; $\int e^x\,dx = e^x$.

4. $\int \cos x\,dx = \sin x$.

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x$.

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$.

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$.

8. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{\cos x}$ $(= \sec x)$.

9. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\sin x}$ $(= -\operatorname{cosec} x)$.

10. $\int \sin x \cos x\,dx = \frac{\sin^2 x}{2}$.

---

11. $\int \operatorname{tg} x\;dx = -l\cos x$.

12. $\int \operatorname{ctg} x\;dx = l \sin x$.

13. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = l\operatorname{tg} x$; $\int \frac{dx}{\sin x} = l\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

14. $\int \frac{dx}{\cos x} = l\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$.

---

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}.$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b} \arcsin \frac{bx}{a}.$

16. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x = -\operatorname{arc\,ctg} x + \frac{\pi}{2}.$

$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \frac{bx}{a}.$

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc\,sec} x$

$\int \frac{dx}{x\sqrt{b^2x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,sec} \frac{bx}{a}.$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = -\arcsin(1-x).$

§ 100. Allgemeine Formeln; Integrationsweisen entwickelter Funktionen.

Es seien u, v, w .... Funktionen von x; A, B... konstante Faktoren.

1. Integration einer Summe.

$$\int (Au + Bv + Cw + \ldots.)\,dx = A\int u\,dx + B\int v\,dx + C\int w\,dx + \ldots$$

2. Teilweise Integration.

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du \text{ und}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Beispiel:

$$\int x^2 \cos x\,dx = \int x^2\,d\sin x = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,dx$$

$$\int x \sin x\,dx = -\int x\,d\cos x = -x\cos x + \int \cos dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C, \text{ also}$$

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$$

3. Integration durch Substitution. Es sei $x = \varphi(z)$, dann ist $dx = \varphi'(z)\,dz$,

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz.$$

Beispiel: $\int \frac{dx}{x^m (a + bx)^n}$. Man setzt $\frac{a}{x} + b = z$, dann ergiebt sich

$$-\frac{1}{a^{m+n-1}} \int \frac{(z-b)^{m+n-2}}{z^n}\,dz;$$

nun entwickelt man nach dem binomischen Lehrsatz und integriert die einzelnen Summanden.

Die häufigsten Substitutionen sind:

$$z = a + bx;\quad z = a + bx^2;\quad z = \frac{a}{x} + b.$$

$$z = \frac{a + bx}{a - bx},\quad \text{oder } x = \frac{a}{b} \cdot \frac{z-1}{z+1};$$

$$\sqrt[m]{a + bx} = z,\quad \text{oder } x = \frac{z^m - a}{b}\, x\,dx = \frac{m}{b} \cdot z^{m-1} dz;$$

$$\sin x = z \text{ und } dx = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

4. Integration durch Zerlegung in Teilbrüche.

Jede unecht gebrochene, rationale Funktion $\frac{\psi(x)}{F(x)}$ lässt sich in eine ganze Funktion $\varphi(x)$ und eine echt gebrochene, rationale Funktion $\frac{f(x)}{F(x)}$ umformen. Diese letztere lässt sich in eine Summe von Teilbrüchen zerlegen.

1. Die Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ seien sämtlich reell und untereinander verschieden, es sei

$$F(x) = (x - a)(x - b)(x - c) \ldots = 0,$$

dann ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots.$$

hiebei ist

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)},\ B = \frac{f(b)}{F'(b)}, \ldots.$$

2. $F(x) = 0$ hat auch komplexe Wurzeln, z. B. $p+qi$ und $p-qi$, dann ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-p-qi} + \frac{A_2}{x-p+qi} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)},$$

hiebei ist

$$A_1 = \frac{f(p+qi)}{F'(p+qi)},\ A_2 = \frac{(f(p-qi)}{F'(p-qi)}.$$

Fasst man nach der Bestimmung von A_1 und A_2 die beiden ersten Brüche zusammen, so geben sie einen reellen Bruch mit dem Nenner $(x-p)^2 + q^2$.

3. Mehrfache Wurzeln. Es sei

$$F(x) = 0 = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots.,\ \text{dann ist}$$

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots. + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$

$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots. + \frac{B_{\beta-1}}{x-b}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzt man $F(x) = (x-a)^\alpha \cdot \varphi(x)$, so ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)},\ \text{woraus}$$

$$A = \frac{f(a)}{\varphi(a)};$$

durch Anwendung desselben Verfahrens auf den Bruch $\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)}$ erhält man A_1 u. s. f.

Das Integral der ursprünglichen, gebrochenen Funktion ergiebt sich nun durch die Integration der einzelnen Teile.

5. Integration durch unendliche Reihen.

1. Wenn $f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ eine Reihe ist, deren Glieder stetige Funktionen einer Veränderlichen x sind, wenn ferner diese Reihe für a und b und alle Werte zwischen a und b konvergent ist und wenn f(x) die Grenze ist, gegen die sie konvergiert, so ist (s. § 101,1)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \int_a^b u_3\,dx + \ldots$$

2. Liefert die Mac Laurinsche Reihe für f(x) eine konvergente Reihe

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots,$$

so ist

$$\int f(x)\,dx = C + x\,f(0) + \frac{x^2}{2!} f'(0) + \frac{x^3}{3!} f''(0) + \ldots$$

Die Integration durch unendliche Reihen besteht also darin, dass man den betreffenden Ausdruck (z. B. durch den binomischen Lehrsatz, die logarithmische Reihe u. a.) in eine unendliche Reihe verwandelt und, nach Untersuchung der Konvergenzverhältnisse, die einzelnen Glieder derselben integriert.

§ 101. Bestimmte Integrale.

1. Ist $f(x)\,dx$ das Differential von $\varphi(x)$, so ist $\varphi(x) + C$ das unbestimmte Integral von $f(x)\,dx$; dagegen heisst

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

das bestimmte Integral genommen zwischen den Grenzen a und b, d. h. für $x = a$ und $x = b$. Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ist die Grenze der Summe der unendlich kleinen Werte des Differentials $f(x)\,dx$, wenn x durch unendlich kleine Aenderungen h von a in b übergeht; daher auch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \left\{ f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots \right\} . h.$$

2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

3. $\int_a^b [f(x)\,dx \pm \varphi(x)\,dx] = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx.$

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx,$

c und d Werte zwischen a und b.

5. Angenäherte Berechnung eines bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$. — Es sei für jeden Wert von x zwischen a und b für eine Funktion $\varphi(x)$

$\varphi(x) < f(x)$, desgleichen für eine zweite $\psi(x)$

$\psi(x) > f(x)$, dann ist

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Simpsonsche Regel. Um einen Näherungswert von $\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\,dx$ zu finden, teile man die Strecke zwischen x_0 und x_{2n} in 2 n gleiche Teile von der Länge h, und bestimme die zu den Teilpunkten gehörigen Ordinaten $y_0, y_1, y_2 \ldots y_{2n}$, dann ist annähernd

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + y_{2n})$$

(s. auch § 102_{10}).

6. Summierung von Reihen durch bestimmte Integrale.

Wird $f(x, m)\,dx$ zwischen zwei Grenzen a und b, die von m unabhängig sind integriert, so ist das Ergebnis im allgemeinen wieder eine Funktion von m, so dass also

$$\int_a^b f(x, m)\,dx = \varphi(m), \text{ daher}$$

$$\int_a^b \left[f(x,0)+f(x,1)+f(x,2)+\ldots+f(x,n-1)\right]dx$$
$$=\varphi(0)+\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n-1).$$

Lässt sich die unter dem Integralzeichen stehende Reihe leicht summieren, so erhält man die Summe der rechts stehenden Reihe in Form eines bestimmten Integrals.*)

7. Besondere bestimmte Integrale

1. $$\int_0^\infty \frac{dx}{a+bx^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$$

2. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\pi$$

3. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}; \quad \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=1$$

4. $$\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx; \quad 2n>0$$

5. $$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{2.4.6\ldots\ldots 2n}{1.3.5\ldots\ldots(2n+1)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx=\frac{2.4.6\ldots\ldots 2n}{1.3\ldots\ldots(2n+1)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx; \quad 2n+1>1$$

6. $$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}; \quad a>0$$

*) Siehe Schlœmilch, Uebgsbch. z. St. d. höh. An. 2. Teil, S. 168.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos a x}{x} d x = \infty$$

7. $\int_0^{\infty} e^{-x} d x = 1; \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

8. $\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} d x = \frac{n!}{a^{n+1}}$ (a > 0, n ganze Zahl.)

C. Anwendung der Infinitesimalrechnung auf Geometrie.

§ 102. Ebene Kurven.

1. Ist $y = f(x)$ die Gleichung einer Kurve, τ der Winkel der Tangente mit der Xaxe, dann ist (ds s. § 102[4]):

$$\sin \tau = \frac{d y}{d s}, \ \cos \tau = \frac{d x}{d s}, \ \operatorname{tg} \tau = \frac{d y}{d x} = y'.$$

Wenn $y' = 0$, dann ist die Tangente parallel der Xaxe, ist $y' = \infty$, so ist sie parallel der Yaxe.

2. Verlauf. Die Kurve steigt (d. h. y wächst) bei zunehmendem x, wenn $y' > 0$, sie fällt, wenn $y' < 0$.

Die Kurve ist in irgend einem Punkt erhaben (konvex) gegen die Xaxe, wenn y und y'' für diesen Punkt gleiche Zeichen haben; im andern Fall ist sie hohl (konkav) gegen die Xaxe (s. § 97_3).

3. Besondere Punkte. Die Kurve hat in einem bestimmten Punkt einen Wendepunkt, wenn für denselben y' ein Maximum oder Minimum erreicht, also wenn $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$, während $\frac{d^3 y}{d x^3} \gtrless 0$.

Ein Punkt ist ein vielfacher Punkt, wenn sich mehrere Kurvenzweige in ihm schneiden, es müssen sich also mehrere Werte von y' ergeben$\left(\frac{\delta F}{\delta x} = 0, \frac{\delta F}{\delta y} = 0\right)$.

Werden dieselben imaginär, so ist der Punkt ein isolierter Punkt; giebt es für y' zusammenfallende Werte, so ist der Punkt ein Rückkehrpunkt. In zweifelhaften Fällen ist eine Untersuchung der Kurve in der Nähe des Punktes nötig.

4. Längen.

Bogenelement $ds = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$.

ds muss bei der Bestimmung von $\sin\tau$ und $\cos\tau$ (s. 1.) mit dem Zeichen genommen werden, das dem für $\mathrm{tg}\,\tau$ entspricht.

Die Tangente und Normale in Punkt P schneiden die Xaxe in T, bezw. in U, dann ist:

$$\text{Tangente PT} = \frac{y}{y'} \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\text{Subtangente} = \frac{y}{y'}$$

$$\text{Normale PU} = y\sqrt{1 + y'^2}$$

$$\text{Subnormale} = y y'.$$

5. Gleichung der

Tangente im Punkt (x, y), (ξ, η) die laufenden Koordinaten der Tangente,

$$\eta - y = y'(\xi - x), \text{ oder } \frac{\delta F}{\delta x}(\xi - x) + \frac{\delta F}{\delta y}(\eta - y) = 0.$$

Normale

$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x), \text{oder } \frac{\delta F}{\delta y}(\xi - x) - \frac{\delta F}{\delta x}(\eta - y) = 0.$$

Asymptote

$y = mx + b$, wobei

$$m = \lim \frac{y}{x}\bigg|_{x=\infty} = \lim \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=\infty} = \lim y'\bigg|_{x=\infty}$$

$$b = \lim (y - x y')_{x=\infty}.$$

6. Berührung von Kurven. Zwei Kurven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ haben in einem bestimmten, gemeinschaftlichen Punkte eine Berührung nter Ordnung,

wenn sie in diesem Punkte $n+1$ zusammenfallende (unendlich nahe) Punkte gemeinschaftlich haben, dies ist der Fall, wenn für denselben alle Ableitungen von $f(x)$ und $\varphi(x)$ bis zur nten einschl. einander gleich sind. Eine Gerade bildet mit einer Kurve $y=f(x)$ eine Berührung nter Ordnung, wenn für den gemeinschaftlichen Punkt alle Ableitungen von $f''(x)$ bis zur nten verschwinden und $f'(x)=\varphi'(x)$ (Wendepunkt, wenn n gerade, Flachpunkt, wenn n ungerade ist). Das Berühren ist mit oder ohne Schneiden im Berührungspunkt verbunden, je nachdem die Berührung von gerader oder ungerader Ordnung ist.

7. Krümmungskreis. Er ist derjenige Kreis, der mit einer Kurve drei unendlich nahe Punkte gemeinschaftlich, also eine Berührung zweiter Ordnung im Punkt (x, y) hat, der Mittelpunkt desselben, der Krümmungsmittelpunkt ist der Schnittpunkt zweier unendlicher naher (zusammenfallender) Normalen. Der Krümmungshalbmesser ϱ und die Kordinaten (ξ, η) des Krümmungsmittelpunktes sind bestimmt durch die drei Gleichungen

1. $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\varrho^2$
2. $(x-\xi)+(y-\eta)\cdot y'=0$
3. $1+y'^2+(y-\eta)y''=0$, hieraus ergiebt sich

Krümmungshalbmesser $\varrho=\pm(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}:y''$

($\pm$ je nachdem $y'' \gtrless 0$)

$$\begin{cases} \xi=x-(1+y'^2)\cdot y':y'' \\ \eta=y+(1+y'^2):y'' \end{cases}$$

Ist die Kurve gegeben durch die Gleichungen $x=\varphi(t)$ und $y=\psi(t)$, so ist

$$\varrho=(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}:(x'y''-x''y')$$

$$\begin{cases} \xi=x-y'(x'^2+y'^2):(x'y''-x''y') \\ \eta=y+x'(x'^2+y'^2):(x'y''-x''y'). \end{cases}$$

8. Die Evolute einer Kurve ist der geometrische Ort des Krümmungsmittelpunktes. Ihre Gleichung wird erhalten, indem man aus den Gleichungen für ξ und η in Nr. 7 unter Benützung der Kurvengleichung x und y eliminiert. Die gegebene Kurve heisst Evolvente. Jeder Krümmungshalbmesser ist Normale zur Evolvente, Tangente an die Evolute. Differenz zweier Krümmungshalbmesser gleich dem dazwischen liegenden Bogen der Evolute. Wird ein um die Evolute gelegter, biegsamer und unausdehnbarer Faden in straffer Spannung abgelöst, so beschreibt der Anfangspunkt des Fadens die Evolvente.

9. Hüllkurven. Die Gleichung $F(x, y, p) = 0$, worin p ein veränderlicher Parameter ist, stellt eine Kurvenschar dar, welche eine Kurve umhüllt; die Gleichung der umhüllten Kurve ergiebt sich durch Elimination von p aus den Gleichungen

$$1.\quad F(x, y, p) = 0 \text{ und}$$

$$2.\quad \frac{\delta F}{\delta p} = 0.$$

10. Flächeninhalt (Quadratur). Der Inhalt der Fläche, welche zwischen der Kurve, der Xaxe und den zu den Abscissen x_0 und x_1 gehörigen Ordinaten eingeschlossen ist, ergiebt sich aus

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

Simpsonsche Regel. Ist f(x) höchstens vom 3. Grade, y_m die Ordinate in der Mitte zwischen x_0 und x_1 dann ist

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{1}{6}(x_1 - x_0)(y_0 + 4y_m + y_1).$$

(s. auch § 101_5).

Kurvenlänge (Rektifikation). Die Länge s eines

Kurventeils, welcher zwischen den Abscissen x_0 und x_1 liegt, ist

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{dx^2+dy^2} = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

11. Polarkoordinaten. Gleichung der Kurve:

$$F(r,\varphi)=0 \text{ oder } r=f(\varphi).$$

Winkel ψ der Tangente (Richtung im Sinn des wachsenden φ) mit dem Strahl r:

$$\sin\psi=\frac{r\,d\varphi}{ds}=\frac{r}{s'},\ \cos\psi=\frac{dr}{ds}=\frac{r'}{s'},\ \operatorname{tg}\psi=\frac{r\,d\varphi}{dr}=\frac{r}{r'}.$$

Bogenelement:

$$ds=\pm\sqrt{dr^2+r^2\,d\varphi^2}=\pm\sqrt{r'^2+r^2}\,d\varphi.$$

(ds ist bei der Bestimmung von sin ψ und cos ψ mit dem tg ψ entsprechenden Vorzeichen zu nehmen.)

Krümmungshalbmesser:

$$\varrho=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2-r\,r''+2r'^2}.$$

Fläche zwischen der Kurve und den zu φ_0 und φ_1 gehörigen Strahlen

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2\,d\varphi.$$

Kurvenlänge:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{r'^2+r^2}\,.\,d\varphi=\int_{r_0}^{r_1}\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}\,.\,dr.$$

§ 103. Raumkurven (doppelt gekrümmte Kurven).

1. Eine Raumkurve ist gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{cases} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ z=\chi(t)\end{cases} \text{ oder } \begin{cases} f(x,y,z)=0\\ F(x,y,z)=0.\end{cases} \quad \text{(Schnittlinie der Flächen.)}$$

$$\text{oder } \begin{cases} y=\varphi_1(x)\\ z=\varphi_2(x).\end{cases} \quad \text{(Projektionen der Kurve.)}$$

2. Bogenelement

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \,.\, dx.$$

3. Gleichungen der Tangente im Punkt (x, y, z)

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}, \text{ oder}$$

$$\frac{\xi - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\eta - \psi(t)}{\psi'(t)} = \frac{\zeta - \chi(t)}{\chi'(t)}, \text{ oder}$$

$$\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta x}(\xi - x) + \frac{\delta f}{\delta y}(\eta - y) + \frac{\delta f}{\delta z}(\zeta - z) = 0, \\ \frac{\delta F}{\delta x}(\xi - x) + \frac{\delta F}{\delta y}(\eta - y) + \frac{\delta F}{\delta z}(\zeta - z) = 0. \end{cases}$$

Winkel α, β, γ der Tangente mit den Axen bestimmt durch

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

4. Gleichung der Normalebene im Punkt(x, y, z)

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0, \text{ oder}$$

$$[\xi - \varphi(t)]\,\varphi'(t) + [\eta - \psi(t)]\,\psi'(t) + [\zeta - \chi(t)]\,\chi'(t) = 0.$$

5. Gleichung der Schmiegungsebene (= Krümmungsebene = Oskulationsebene = Ebene durch Punkt (x, y, z) und zwei unendlich nahe Punkte)

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0, \text{ wobei}$$

$$A = dy\,d^2z - d^2y\,dz,\; B = dz\,d^2x - d^2z\,dx,\; C = dx\,d^2y - d^2x\,dy.$$

Normale zur Schmiegungsebene:

$$\frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C}.$$

Die Winkel λ, μ, ν dieser Normalen mit den Axen sind bestimmt durch

$$\cos\lambda = \frac{A}{D}, \quad \cos\mu = \frac{B}{D}, \quad \cos\nu = \frac{C}{D}, \text{ wobei}$$

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Die Hauptnormale ist die Schnittlinie der Normalebene mit der Schmiegungsebene; die Gleichungen der Hauptnormalen sind:

$$\frac{\xi - x}{d\frac{dx}{ds}} = \frac{\eta - y}{d\frac{dy}{ds}} = \frac{\zeta - z}{d\frac{dz}{ds}}.$$

6. Kontingenzwinkel $d\tau$, d. h. Winkel zwischen zwei unendlich nahen Tangenten

$$d\tau = \frac{D}{ds^2}.$$

Erster Krümmungshalbmesser

$$\varrho_1 = \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds^3}{D}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt liegt in der Schmiegungsebene, auf der Hauptnormalen und kann als Schnitt der Hauptnormalen mit einer unendlich nahen Normalebene betrachtet werden.

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$\xi = x + \varrho_1{}^2 \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \eta = y + \varrho_1{}^2 \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \zeta = z + \varrho_1{}^2 \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Unter der (ersten) Krümmung versteht man

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\varrho_1}.$$

7. Torsionswinkel $d\vartheta$, d. h. Winkel zweier unendlich naher Schmiegungsebenen

$$d\vartheta = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}.$$

Zweite Krümmung oder Drehung der Kurve

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\varrho_2}.$$

Zweiter Krümmungshalbmesser (Halbm. der Drehung)

$$\varrho_2 = \frac{ds}{d\vartheta}.$$

§ 104. Krumme Flächen.

1. Eine Fläche ist gegeben durch die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0, \text{ oder entwickelt}$$
$$z = f(x, y).$$

Bezeichnungen:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = p, \quad \frac{\delta z}{\delta y} = q; \quad \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = r, \quad \frac{\delta^2 z}{\delta x \, \delta y} = s, \quad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = t.$$

2. Gleichung der Berührungsebene im Punkt (x, y, z)

$$(\xi - x)\frac{\delta F}{\delta x} + (\eta - y)\frac{\delta F}{\delta y} + (\zeta - z)\frac{\delta F}{\delta z} = 0, \text{ oder}$$
$$p(\xi - x) + q(\eta - y) - (\zeta - z) = 0.$$

3. Gleichungen der Normalen im Punkt (x, y, z)

$$\frac{\xi - x}{\frac{\delta F}{\delta x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\delta F}{\delta y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\delta F}{\delta z}} \text{ oder}$$

$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = -(\zeta - z).$$

Winkel λ, μ, ν der Normalen mit den Axen bestimmt durch

$$\cos\lambda = \frac{\frac{\delta F}{\delta x}}{N}, \quad \cos\mu = \frac{\frac{\delta F}{\delta y}}{N}, \quad \cos\nu = \frac{\frac{\delta F}{\delta z}}{N}, \text{ bezw.}$$

$$\cos\lambda = \frac{p}{n}, \quad \cos\mu = \frac{q}{n}, \quad \cos\nu = -\frac{1}{n}, \text{ wobei}$$

$$N^2 = \left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta F}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta F}{\delta z}\right)^2 \text{ und}$$
$$n^2 = p^2 + q^2 + 1.$$

4. Die Schnittlinie irgend einer durch die Normale gehenden Ebene mit der Fläche heisst Normalschnitt. Es sei ϱ der Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes im Punkt P, α, β, γ die Winkel, welche die Tangente des Normalschnittes in P mit den Axen bildet, dann ist

$$\varrho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2\,s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}.$$

Satz von Meunier. Geht eine Ebene durch die Tangente eines Normalschnittes (im Fusspunkt P der Normalen), so ist der Krümmungshalbmesser ϱ' dieses schiefen Schnittes im Punkt P

$$\varrho' = \varrho\cos(\varrho\,\varrho') \text{ oder}$$

der Krümmungshalbmesser des schiefen Schnittes wird erhalten, indem man den Krümmungshalbmesser des Normalschnittes auf die Ebene des ersteren projiziert.

5. Die beiden (aufeinander senkrechten) Ebenen, für welche ϱ einen grössten und einen kleinsten Wert erreicht, heissen Hauptnormalschnitte, die Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 derselben bestimmen sich aus den Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \varrho_1 + \varrho_2 &= \frac{(1+q^2)\,r - 2\,p\,q\,s + (1+p^2)\,t}{r\,t - s^2}\,.\,n \\ \varrho_1\,\varrho_2 &= \frac{n^4}{rt - s^2} \text{ oder als Wurzeln der Gleichung} \end{aligned}\right.$$

$$(rt - s^2)\,\varrho^2 - \left[(1+q^2)\,r - 2\,p\,q\,s + (1+p^2)\,t\right] n\,\varrho + n^4 = 0.$$

6. Satz von Euler. Für irgend einen Normalschnitt, dessen Ebene mit der Ebene des zu ϱ_1 gehörigen Hauptnormalschnittes den Winkel φ bildet, ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_2}.$$

Der Ausdruck $\dfrac{1}{\varrho_1\,\varrho_2}$

heisst das Mass der Krümmung für den betreffenden Punkt.

7. Sind ϱ' und ϱ'' die Krümmungshalbmesser zweier auf einander senkrechten Normalschnitte, so ist

$$\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$$

d. h. für denselben Punkt einer Fläche ist die Summe der Krümmungen konstant.

8. Krümmungslinie heisst der Ort des Punktes einer Fläche, für welchen die unendlich nahen Normalen zur Fläche sich schneiden; die Normalen gehören daher einer abwickelbaren Fläche an. Durch jeden Punkt einer Oberfläche gehen zwei Krümmungslinien, die auf einander senkrecht sind und die Tangenten der Hauptnormalschnitte berühren. Sie sind dargestellt durch die Gleichung

$$\left[1 + q^2)s - p\,q\,t\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left[(1+q^2)r - (1+p^2)t\right]\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left[p\,qr - (1+p^2)s\right] = 0$$

und durch die Gleichung der Fläche.

9. Eine auf einer Fläche liegende Linie heisst geodätische Linie, wenn ihre Schmiegungsebenen zugleich Normalebenen zur Fläche sind. Ihre Gleichungen sind

$$\frac{\frac{\delta F}{\delta x}}{d \cos \alpha} = \frac{\frac{\delta F}{\delta y}}{d \cos \beta} = \frac{\frac{\delta F}{\delta z}}{d \cos \gamma}$$

Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einer Fläche gehört einer geodätischen Linie an.

10. Hüllfläche. Die Gleichung

$$F(x, y, z, p) = 0,$$

worin p ein veränderlicher Parameter ist, stellt eine Flächenschar dar, welche eine Fläche umhüllt. Die

Gleichung der Hüllfläche ergiebt sich durch Elimination von p aus

$$\begin{cases} F(x, y, z, p) = 0 \text{ und} \\ \dfrac{\delta F(x, y, z, p)}{\delta p} = 0 \end{cases}$$

11. Quadratur (Komplanation) der Flächen.

Das Differential der Fläche ist

$$dF = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \,.\, dx\, dy$$

$$\text{daher} \quad F = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dy,$$

y_0 und y_1 sind die der Abscisse x entsprechenden Ordinaten der Projektion des Umrisses der Fläche auf die XYebene, x_0 und x_1 sind die Abscissen zu den Ordinaten, welche jene Projektion begrenzen.

Bei Drehflächen ergiebt sich (—Xaxe ist Drehaxe—):

$$F = 2\pi \int y \sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi \int y\, ds$$

Bei Polarkoordinaten hat man:

$$F = \iint \sqrt{\left(r^2 + \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \cos^2\varphi + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)} \,.\, r\, d\varphi\, d\psi$$

(s. § 86,3)

12. Kubatur.

1. Bei Drehflächen (—0x Drehaxe—); die gedrehte Fläche ist begrenzt vom gedrehten Kurvenbogen, den zu den den Endpunkten desselben gehörigen Ordinaten und der Xaxe.

$$V = \pi \int y^2\, dx$$

2. Die gedrehte Fläche ist begrenzt von zwei

Ordinaten und zwei Kurven $y = f(x)$ und $y_1 = f_1(x)$,

$$V = \pi \int (y^2 - y_1{}^2)\, dx$$

3. Es sei u der Inhalt eines parallel zur Ebene YOZ geführten Schnittes, dann ist der Inhalt des Körpers, der zwischen zwei parallel zu YOZ geführten Schnitten mit den Abscissen x_0 und x_1 liegt,

$$V = \int_{x_0}^{x_1} u\, dx \qquad \text{(u abhängig von x)}$$

4. Allgemeine Formel:

$$V = \iiint dx\, dy\, dz.$$

5. Für Polarkoordinaten (Bezeichn. s. § 86_3) ergiebt sich

$$V = \frac{1}{3} \iint r^3 \cos\varphi\, d\varphi\, d\psi.$$

§ 105. Viel gebrauchte Zahlenwerte.

Zahlenwert	Logarithmus	Zahlenwert	Logarithmus
$\sqrt{2} = 1{,}4142$	0,15 052	$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599$	0,10 034
$\sqrt{3} = 1{,}73205$	0,23 856	$\sqrt[3]{3} = 1{,}4422$	0,15 903
$\sqrt{5} = 2{,}2361$	0,34 948	$\sqrt[3]{5} = 1{,}7100$	0,23 300
$\sqrt{6} = 2{,}4495$	0,38 908	$\sqrt[3]{6} = 1{,}8171$	0,25 937
$\sqrt{10} = 3{,}16225$	0,50 000	$\sqrt[3]{10} = 2{,}1544$	0,33 333

Zahlenwert	Logarithmus	Zahlenwert	Logarithmus
$\pi = 3,1416$	0,49 715	$\pi^2 = 9,8696$	0,99 430
$2\pi = 6,2832$	0,79 818	$\sqrt{\pi} = 1,7725$	0,24 857
$4\pi = 12,5664$	1,09 921	$\sqrt[3]{\pi} = 1,4646$	0,16 572
$\frac{\pi}{2} = 1,5708$	0,19 612	$\frac{1}{\pi} = 0,31831$	0,50 285—1
$\frac{\pi}{3} = 1,0472$	0,02 003	$\frac{1}{\pi^2} = 0,10132$	0,00 570—1
$\frac{\pi}{4} = 0,7854$	0,89 509—1	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,56419$	0,75 143—1
$\frac{\pi}{6} = 0,5236$	0,71 900—1	$\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} = 0,68278$	0,83 428—1
$\frac{4}{3}\pi = 4,1888$	0,62 209	$\frac{180}{\pi} = 57,29578$	1,75 812
$g = 9,81$	0,99 167	$e = 2,7183$	0,43 429
$\frac{g}{2} = 4,905$	0,69 064	$e^2 = 7,3891$	0,86 859
$\frac{1}{g} = 0,1019$	0,00 833—1	$e^3 = 20,086$	1,30 288
$\sqrt{g} = 3,1321$	0,49 583	$\sqrt{e} = 1,6487$	0,21 715
$\frac{\pi}{\sqrt{g}} = 1,0030$	0,00 132	$\sqrt[3]{e} = 1,3956$	0,14 476