Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

Ebene Geometrie.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

Ebene Geometrie.

§ 38. Winkelsätze (von Parallelen, vom Dreieck und Vieleck).

1. Nebenwinkel betragen zusammen 2 R.

2. Scheitelwinkel sind einander gleich.

3. a) Werden zwei Parallelen von einer dritten geschnitten, so sind:

1. je zwei entsprechende Winkel 2. „ „ innere Wechselwinkel 3. „ „ äussere „	einander gleich

und es betragen

1. je zwei innere Gegenwinkel 2. „ „ äussere „ 3. „ „ gemischte Wechselwinkel	zusammen 2 R.

b) Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten und sind

1. zwei entsprechende Winkel oder 2. „ innere Wechselwinkel „ 3. „ äussere „	einander gleich

oder betragen

1. zwei innere Gegenwinkel oder 2. „ äussere „ „ 3. „ gemischte Wechselwinkel	zusammen 2 R,

so sind die Geraden parallel.

Zusätze: a) Lote zu derselben Geraden sind parallel;
b) eine Gerade, welche zu einer von zwei Parallelen senkrecht ist, ist auch Lot zur andern.

4. Jeder Aussenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Dreieckswinkel.

5. Die Winkelsumme ist im Dreieck **2 R**, im Viereck **4 R**, im n-Eck **2 n — 4 R**.

6. Die Anzahl der Diagonalen, die von einer Ecke eines n-Ecks ausgehen, ist n — 3, die Anzahl sämtlicher Diagonalen $\frac{n(n-3)}{2}$.

§ 39. Kongruenzsätze und Längenbeziehngen.

A) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn

1. Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich,
2. Eine Seite und zwei gleichliegende Winkel gleich,
3. Die drei Seiten gleich,
4. Zwei Seiten und der Gegenwinkel des einen Paares gleich und die des andern Paares gleichartig (beide $\gtreqless$ R) sind.

(Besonders zu merken: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie zwei Seiten und den Gegenwinkel der grösseren gleich haben.)

B) Zwei n-Ecke sind kongruent, wenn sie alle Seiten bis auf eine und alle entsprechenden Winkel bis auf die an der letzten Seite liegenden gleich haben; (2 n — 3 unabhängige Stücke.)

C) Inkongruenz.

1. Haben zwei Dreiecke zwei Seiten gleich, die eingeschlossenem Winkel aber ungleich, so sind auch die dritten Seiten ungleich und zwar liegt dem grösseren der beiden Winkel die grössere Seite gegenüber.

2. Haben zwei Dreiecke zwei Seiten gleich, die

dritten Seiten aber ungleich, so sind auch die Gegenwinkel der letzteren ungleich und zwar liegt der grösseren Seite der grössere Winkel gegenüber.

D) 1. In jedem Dreieck

a) liegt der grösseren von zwei Seiten der grössere Winkel gegenüber,

b) liegt dem grösseren von zwei Winkeln die grössere Seite gegenüber

c) ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte,

d) ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte.

2. Unter allen Verbindungen zwischen zwei Punkten ist die gerade die kürzeste.

3. Unter allen Strecken zwischen einem Punkt und einer Geraden ist das Lot die kürzeste.

§ 40. Sätze vom Parallelogramm und Trapez.
(Winkel, Seiten, Diagonalen).

Im Trapez sind nur zwei, im Parallelogramm je zwei Gegenseiten parallel.

1. Im Parallelogramm

a) sind je zwei aufeinanderfolgende Winkel zusammen 2 R;

b) sind je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich;

c) sind je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich;

d) halbieren sich die Diagonalen gegenseitig

2. Ein Viereck ist ein Parallelogramm:

a) Wenn je zwei Gegenseiten gleich;

b) „ „ „ Gegenwinkel „ ;

c) „ ein Paar Gegenseiten gleich und parallel;

d) Wenn sich die Diagonalen gegenseitig halbieren.

3) Ein Viereck ist

a) ein rechtwinkliges Parallelogramm, wenn drei Winkel rechte sind;

b) ein gleichseitiges Parallelogramm, wenn alle Seiten einander gleich sind.

4. Im rechtwinkligen Parallelogramm sind die Diagonalen einander gleich.

5. Im gleichseitigen Parallelogramm

a) halbiert jede Diagonale die Winkel, durch die sie geht;

b) stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht.

6. Ein Parallelogramm ist rechtwinklig:

a) Wenn ein Winkel ein R;

b) Wenn zwei aufeinander folgende Winkel einander gleich sind;

c) Wenn die Diagonalen einander gleich sind.

7. Ein Parallelogramm ist gleichseitig:

a) Wenn zwei aufeinander folgende Seiten einander gleich sind;

b) Wenn eine Diagonale einen Winkel desselben halbiert:

c) Wenn die Diagonalen senkrecht aufeinanderstehen.

8. Im gleichschenkligen Trapez sind

a) Die Winkel an derselben Grundlinie einander gleich,

b) Die Diagonalen einander gleich.

9. Ein Trapez ist gleichschenklig:

a) Wenn zwei Winkel an derselben Grundlinie einander gleich sind;

b) Wenn die Diagonalen einander gleich sind.

10. Die Parallele durch die Mitte

a) einer Dreiecksseite zu einer zweiten halbiert die dritte und ist gleich der Hälfte der zweiten,

b) einer nicht parallelen Seite eines Trapezes zu einer Grundlinie halbiert die andere nicht parallele Seite und ist gleich der halben Grundliniensumme.

11. Die Verbindungslinie der Mitten

a) zweier Dreiecksseiten ist parallel und gleich der Hälfte der dritten.

b) der nicht parallelen Seiten eines Trapezes ist parallel den Grundlinien und gleich der halben Summe derselben.

§ 41. Gerade Linien und Winkel am Kreis; regelmässiges Vieleck.

1. Ein Punkt liegt innerhalb, auf oder ausserhalb einer Kreislinie, je nachdem sein Mittelpunktsabstand $\lesseqgtr$ als der Halbmesser ist,

2. Eine Gerade hat mit einem Kreis zwei, einen oder keinen Punkt gemeinschaftlich, d. h. sie schneidet, berührt oder trifft nicht, je nachdem ihr Mittelpunktsabstand $\lesseqgtr$ als der Halbmesser ist.

3. a) Gleiche Sehnen haben gleiche Mittelpunktsabstände und umgekehrt.

b) Von zwei ungleichen Sehnen hat die grössere den kleineren Mittelpunktsabstand und umgekehrt.

4. Zu gleichen Zentriwinkeln in gleichen Kreisen oder in demselben Kreis gehören gleiche Bögen, Sehnen, Aus- und Abschnitte und umgekehrt.

5. Ein Peripheriewinkel ist die Hälfte des zugehörigen Zentriwinkels.

6. Alle Peripheriewinkel über demselben Bogen sind einander gleich.

Datum a, r, α.

7. Der Tangentensehnenwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel im nicht eingeschlossenen Bogen.

8. a) Im Kreisviereck ist die Summe zweier Gegenwinkel gleich der Summe der zwei andern, d. h. 2 R.

b) Wenn in einem Viereck die Summe zweier Gegenwinkel 2 R ist, so ist es ein Kreisviereck.

9. a) Im Tangentviereck ist die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der zwei andern.

b) Wenn in einem Viereck die Summe zweier Gegenseiten gleich der Summe der zwei andern ist, so ist das Viereck ein Tangentenviereck.

10. Tangentenabschnitte beim Dreieck

	an den Inkreis,	an den Ankr. d. Gegens.
von der Ecke A	$\frac{b+c-a}{2} (= s-a)$,	$\frac{b+c+a}{2} = s$
„ „ „ B	$\frac{c+a-b}{2} (= s-b)$,	„
„ „ „ C	$\frac{a+b-c}{2} (= s-c)$,	„

Datum s, ϱ_1, α.

11. Zwei Kreise K und K_1

a) berühren sich, wenn sie einen Punkt der Zentrale gemeinschaftlich haben,

b) haben einen Punkt der Zentrale gemeinschaftlich, wenn sie sich berühren.

c) K und K_1 berühren sich, wenn $z = r \pm \varrho$

„ „ „ schneiden „ „ $\begin{cases} z < r + \varrho \text{ u.} \\ z > r - \varrho \end{cases}$

K liegt innerhalb K_1, wenn $z < r - \varrho$
K „ ausserhalb „ „ $z > r + \varrho$,
z Zentrale, r der grössere, ϱ der kleinere Halbmesser.

12. Kreisteilung. Zu einem Zentriwinkel von $\frac{4}{n}R$ — oder einem Peripheriewinkel von $\frac{2}{n}R$ — gehört der nte Teil der Kreislinie.

13. Regelmässiges Vieleck.

Eckenzahl:	3	4	5	6	... n
Zentriwinkel:	$\frac{4}{3}R$	$1R$	$\frac{4}{5}R$	$\frac{2}{3}R$	... $\frac{4}{n}R$
Polygonwinkel:	$\frac{2}{3}R$	$1R$	$\frac{6}{5}R$	$\frac{4}{3}R$	... $\frac{2n-4}{n}R$.

§ 42. Proportionalität von Strecken, Aehnlichkeit.

1. Werden die Schenkel eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel von zwei Parallelen geschnitten, so sind die Abschnitte auf dem einen Schenkel proportional den entsprechenden auf dem andern und die Parallelen verhalten sich wie die zugehörigen Scheitelabschnitte desselben Schenkels. — Umkehrung.

2. Die Halbierungslinie eines Winkels im Dreieck teilt die Gegenseite innerlich im Verhältnis der Anseiten; die Halbierungslinie des Aussenwinkels teilt sie äusserlich in demselben Verhältnis. — Umkehrung.

3. Werden die Schenkel eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel von zwei Parallelen geschnitten, so sind die abgeschnittenen Dreiecke einander ähnlich.

4. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn
   a) zwei Seiten proportional und der eingeschlossene Winkel gleich,

b) zwei Winkel gleich,

c) die 3 Seiten proportional,

d) zwei Seiten proportional der Gegenwinkel des einen Paares gleich und die Gegenwinkel des andern Paares gleichartig sind. — (Besonderer Fall: Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Seiten proportional und den Gegenwinkel der grösseren gleich haben.)

5. Zwei Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten, oder wie die reciproken Werte der Seiten und umgekehrt; also

$$h : h' : h'' = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = bc : ac : ab$$

6 a) Zieht man von zwei ähnlich liegenden Punkten bei zwei ähnlichen Vielecken Strahlen nach allen entprechenden Ecken, so entstehen paarweis ähnliche Dreiecke.

Besonderer Fall: Durch die Diagonalen aus zwei entsprechenden Ecken werden zwei ähnliche Vielecke in paarweis ähnliche Dreiecke zerlegt.

b) Entstehen durch Strahlen, die man von zwei Punkten nach den Ecken zweier Vielecke zieht, paarweis ähnliche, in gleicher Reihenfolge liegende Dreiecke, so sind die Vielecke ähnlich und die beiden Punkten ähnlich liegend.

Besondere Fälle: 1. Werden zwei Vielecke durch die Diagonalen aus zwei Ecken in paarweis ähnliche in gleicher Reihenfolge liegende Dreiecke zerlegt, so sind die Vielecke ähnlich.

2. Zwei Parallelogramme sind ähnlich, wenn sie einen Winkel gleich und die einschliessenden Seiten proportional haben.

7. Regelmässige Vielecke von gleicher Seitenzahl sind ähnlich.

8. In ähnlichen Vielecken sind entsprechende Winkel einander gleich und entsprechende Längen proportional; die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich daher wie entsprechende Seiten.

9. a) Sind zwei Vielecke in perspektivischer Lage und $n-1$ Seitenpaare (worunter keines, das mit einem Strahl zusammenfällt) parallel, so ist auch das nte Paar parallel und die Vielecke sind ähnlich.

b) Sind zwei Vielecke ähnlich und zwei Seitenpaare parallel, so sind auch die übrigen parallel und die Vielecke sind in perspektivischer Lage.

10. a) Die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

b) Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist mittlere Proportionale zu den Hypotenusenabschnitten.

11. Ist in einem gleichschenkligen Dreieck die Basis gleich dem grösseren Abschnitt des stetig geteilten Schenkels, so ist der Winkel an der Spitze $\frac{2}{5}$ R und umgekehrt. (Bestimmungsdreieck des regelmässigen Zehnecks).

12. a) Sekantensatz. Werden die Schenkel eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel von einem Kreis geschnitten, so sind die Scheitelabschnitte des einen Schenkels innere, die des andern äussere Glieder einer Proportion, d. h. das Produkt der Scheitelabschnitte ist konstant. (Potenz eines Punktes in Beziehung auf einen Kreis $= PO^2 - r^2$.)

Besonderer Fall: Wird der eine

Schenkel eines Winkels von einem Kreis geschnitten, der andere berührt, so ist das Quadrat des Tangentenabschnitts gleich dem Produkt der Scheitelabschnitte der Sekante.

b) Sind auf jedem Schenkel eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel vom Scheitel aus je zwei Stücke abgetragen und ist das Produkt der Abschnitte des einen Schenkels gleich dem Produkt der Abschnitte des andern, so liegen die vier Endpunkte der Abschnitte auf einem Kreis.

Besonderer Fall: Sind auf dem einem Schenkel eines Winkels zwei Abschnitte auf dem andern ein Abschnitt vom Scheitel aus abgetragen und ist das Produkt der Abschnitte des ersten Schenkels gleich dem Quadrat des Abschnitts auf dem zweiten Schenkel, so berührt der durch die Endpunkte der drei Abschnitte gelegte Kreis den zweiten Schenkel.

§ 43. Flächenvergleichung, Inhaltsbeziehungen.

1. Parallelogramme — Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich.

2. Ein Dreieck ist halb so gross als ein Parallelogramm von gleicher Grundlinie und Höhe.

3. Ein Trapez ist inhaltsgleich mit einem Parallelogramm, wenn beide gleiche Höhe haben und wenn die Grundlinie des Parallelogrammes gleich der Mittellinie des Trapezes ist. Trapeze sind gleich, wenn sie gleiche Höhe und gleiche Mittellinie haben.

4. Datum für Parallelogramm und Dreieck: a, h, f^2, für das Trapez: $b + d$, h, f^2.

5. Ein Kreis ist gleich einem Dreieck, dessen

Grundlinie gleich dem Umfang und dessen Höhe gleich dem Halbmesser ist.

6. Parallelogramme — Dreiecke, die einen Winkel gleich haben, verhalten sich wie die Produkte der den gleichen Winkel einschliessenden Seiten.

Datum α, (b c), f^2.

7. Aehnliche Vielecke verhalten sich dem Inhalt nach wie die Quadrate entsprechender Längen.

8. Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

9. Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten.

10. Pythagoräischer Lehrsatz:

a) Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten.

b) Allgemeiner Pythagoräischer Lehrsatz: Konstruiert man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren, so ist die Figur über der Hypotenuse gleich der Summe der Figuren über den Katheten.

c) Pythagoräischer Lehrsatz für das schiefwinklige Dreieck: Das Quadrat über einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate der andern Dreiecksseiten vermehrt oder vermindert um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der andern auf sie, je nachdem der Gegenwinkel der ersten Seite stumpf oder spitz ist (vgl. § 58,6).

§ 44. Längen- und Flächenberechnungen.

1. Inhalt des Rechtecks: $a \cdot b$
2. „ „ Quadrats: a^2

3. Inhalt des Parallelogramms: a h

4. „ „ Dreiecks:

$$\begin{cases} \frac{a \cdot h}{2}, \\ \varrho \cdot \frac{a+b+c}{2} = \varrho \cdot s, \\ \varrho_1 \cdot \frac{b+c-a}{2} = \varrho_1(s-a) = \varrho_2(s-b) = \varrho_3(s-c), \\ \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \end{cases}$$

5. Inhalt des Trapezes: $\frac{h(b+d)}{2}$,

6. „ „ regelmässigen n Ecks: $\frac{n \cdot a \cdot \varrho}{2}$,

7. Umfang des Kreises: $2 r \pi = d \pi$; $\left(\pi = 3{,}1416; = \frac{22}{7}\right)$,

8. Inhalt „ „ : $r^2 \pi = \frac{d^2}{4} \pi$,

9. Bogen : $2 r \pi = \alpha^0 : 360^0$; Bogen $= \frac{\alpha r \pi}{180}$,

10. Sektor : $r^2 \pi = \alpha^0 : 360^0$; Sektor $= \frac{\alpha r^2 \pi}{360} = \frac{b r}{2}$,

11. Bogenlänge im Kreis vom Halbmesser 1:

$$\operatorname{arc} \alpha^0 = \frac{\alpha \pi}{180} = \frac{\alpha^0}{\frac{180^0}{\pi}}$$

Regelmässige Vielecke:

12. Dreieck.

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{3 r}{2} = 3 \varrho$$

$$r = \frac{2}{3} h = \frac{a}{3}\sqrt{3} = 2 \varrho$$

$$\varrho = \frac{h}{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{r}{2}$$

$$J = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{h^2}{3}\sqrt{3} = \frac{3\,r^2}{4}\sqrt{3} = 3\,\varrho^2\sqrt{3}$$

13. Sechseck.

$$r = a = \frac{2}{3}\,\varrho\sqrt{3}$$

$$\varrho = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

Diagonale $d_1 = a\sqrt{3} = r\sqrt{3} = 2\,\varrho$

„ $d_2 = 2\,a = 2\,r = \frac{4}{3}\,\varrho\sqrt{3}$

$$J = \frac{3\,a^2}{2}\sqrt{3} = \frac{3\,r^2}{2}\sqrt{3} = 2\,\varrho^2\sqrt{3}$$

14. Quadrat.

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{2} = \varrho\sqrt{2}$$

$$\varrho = \frac{a}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{2}$$

$$J = a^2 = 2\,r^2 = 4\,\varrho^2$$

15. Achteck.

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = \varrho\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

$$\varrho = \frac{a}{2}(\sqrt{2} + 1) = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$a = r\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 2\,\varrho\,(\sqrt{2} - 1)$$

$$d_1 = a\sqrt{2 + \sqrt{2}} = r\sqrt{2} = 2\,\varrho\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$d_2 = a\,(\sqrt{2} + 1) = r\sqrt{2 + \sqrt{2}} = .\,2\,\varrho$$

$$d_3 = a\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = 2\,r = 2\,\varrho\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

$$J = 2\,a^2\,(\sqrt{2} + 1) = 2\,r^2\sqrt{2} = 8\,\varrho^2\,(\sqrt{2} - 1)$$

16. Fünfeck.

$$r = \frac{a}{10}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}} = \varrho(\sqrt{5} - 1)$$

$$\varrho = \frac{a}{10}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = \frac{r}{4}(\sqrt{5} + 1)$$

$$a = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 2\varrho\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

$$d = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1) = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \varrho\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$J = \frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = \frac{5r^2}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$= 5\varrho^2\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

17. Zehneck.

$$r = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1) = \frac{\varrho}{5}\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}$$

$$\varrho = \frac{a}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

$$a = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{2\varrho}{5}\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}$$

$$d_1 = \frac{a}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \varrho(\sqrt{5} - 1)$$

$$d_2 = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5}) = \frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1) = \frac{\varrho}{5}\sqrt{50 + 10\sqrt{5}}$$

$$d_3 = a\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 2\varrho$$

$$d_4 = a(\sqrt{5} + 1) = 2r = \frac{2\varrho}{5}\sqrt{50 - 10\sqrt{5}}$$

$$J = \frac{5a^2}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{5r^2}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 2\varrho^2\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}.$$

§ 45. Zusammenstellung von Daten; weitere Formeln.

A) Datumsbeziehungen. Wo nichts bemerkt ist, beziehen sie sich auf das Dreieck.

1. h, m, $(\beta - \gamma)$.
2. $\begin{cases} h + h', \; a + b, \; \gamma \\ h - h', \; b - a, \; \gamma. \end{cases}$
3. a, r, α.
4. $\begin{cases} s - a, \; \varrho, \; \alpha. \\ s, \; \varrho_1, \; \alpha. \end{cases}$
5. a, h, f^2.
   Trapez: $b + d$, h, f^2.
6. $\begin{cases} s, \; \varrho, \; f^2 \\ s - a, \; \varrho_1, \; f^2. \end{cases}$
   Tangentenviereck: $a + b + c + d$, ϱ, f^2.
7. (bc), α, f^2.
8. $b^2 - c^2$, $(p + q)$, $(p - q)$ s. C_{17} dieses §.

B) Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck.

9. $b^2 = ap$, $c^2 = aq$, (a Hyp., p und q Abschn. derselben).

10. $h^2 = pq$.

11. $a^2 = b^2 + c^2$; $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

12. $bc = ah$.

13. Rationale rechtwinklige Dreiecke sind bestimmt durch

$$a = u^2 + v^2$$
$$b = u^2 - v^2$$
$$c = 2uv.$$

u	v	u^2+v^2 a	u^2-v^2 b	$2uv$ c
2	1	5	3	4
3	1	10	8	6
3	2	13	5	12
4	1	17	15	8
4	2	20	12	16
4	3	25	7	24
5	1	26	24	10
5	2	29	21	20

C) Beziehungen am schiefwinkligen Dreieck.

14. $bp = cq$ (p Projekt. von c auf b, q Projekt. von b auf c).

15. $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cq}$ (Pyth. Lehrsatz für das schiefwinklige Δ), (q Projekt. von b auf c). $\alpha \lessgtr R$.

16. $bc = 2rh$.

17. $b^2 - c^2 = p_1{}^2 - q_1{}^2$ (p_1 und q_1 Projekt. von b und c auf a).

18. $$\begin{cases} a^2 + 4t^2 = 2(b^2 + c^2) \\ 4(t^2 + t'^2 + t''^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \\ a^2 = \frac{4}{9}(2t'^2 + 2t''^2 - t^2). \end{cases}$$

19. $m^2 = bc - vw$ (v und w Abschnitte der Seite a, erzeugt durch Winkelhalbierende m).

20. $$\begin{cases} \text{Dreiecksinhalt } J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ J = \frac{ah}{2} \\ J = \frac{abc}{4r}. \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} \varrho \cdot \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 = J^2 \\ \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} = \frac{1}{\varrho}. \end{cases}$$

22. Kreisviereck (Ptolemäischer Lehrsatz)

$$ee_1 = ac + bd$$

Inhalt des Kreisvierecks:

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

wobei $s = \frac{a+b+c+d}{2}$.

§ 46. Geometrische Oerter.

A. Der geometrische Ort für einen Punkt, der

1. von einem Punkt A die Entfernung r hat, ist die Kreislinie um A mit r;

2. von einer Geraden L auf bestimmter Seite derselben die Entfernung h hat, ist die Parallele zu L auf jener Seite im Abstand h;

3. von zwei Punkten A und B gleiche Entfernung hat, ist das Mittellot zu AB;

4. von den Schenkeln eines Winkels gleichen Abstand hat, ist die Halbierungslinie des Winkels;

5. von zwei Parallelen gleichen Abstand hat, ist die Parallele im mittleren Abstand.

B. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, der

6. den Halbmesser r hat und durch Punkt A geht, ist die Kreislinie um A mit r;

7. den Halbmesser r hat und die Gerade L auf bestimmter Seite berührt, ist die Parallele im Abstand r auf jener Seite;

8. durch die Punkte A und B gehen soll, ist das Mittellot zu AB;

9. die Schenkel eines Winkels berühren soll, ist die Halbierungslinie des Winkels;

10. zwei Parallelen berührt, ist die mittlere Parallele;

11. eine Gerade L im Punkte A berührt, ist das Lot zu L in A;

12. eine Kreislinie im Punkte A berührt, ist die Verbindungslinie des Mittelpunkts mit A;

13. den Halbmesser ϱ hat und eine Kreislinie K vom Halbmesser r von aussen oder innen berührt, ist ein zu K konzentrischer Kreis mit dem Halbmesser $r + \varrho$ oder $r - \varrho$, bezw. $\varrho - r$.

C. Der geometrische Ort für die Spitzen aller Dreiecke auf derselben Seite über der gemeinsamen Grundlinie a mit

14. demselben Winkel α an der Spitze, ist der Kreisbogen über a, welcher den Winkel α fasst;

15. dem gleichen Inhalt, ist eine Parallele zur Grundlinie;

16. demselben Verhältnis m : n für die Seiten b und c ist ein Halbkreis über der Strecke zwischen den beiden Punkten, welche a innerlich und äusserlich im Verhältnis m : n teilen (Satz des Apollonius).

§ 47. Besondere Linien und Punkte am Dreieck.

In einem Dreieck schneiden sich

1. die Mittellote zu den Seiten in einem Punkt, der von den Ecken gleiche Entfernungen hat (Umkreismittelpunkt O);

2. die Halbierungslinien der Winkel in einem Punkt, der von den Seiten gleiche Entfernungen hat (Inkreismittelpunkt M); desgleichen die Halbierungslinie eines Winkels und die der beiden Aussenwinkel an der Gegenseite (Ankreismittelpunkte M_1, M_2, M_3);

3. die Schwerlinien (seitenhalbierende Trans-

versalen) in einem Punkt und teilen sich gegenseitig im Verhältnis 2 : 1 (Schwerpunkt S);

4. die Höhen in einem Punkt (Höhenschnittpunkt H).

In einem Dreieck liegen:

5. Der Höhenschnittpunkt, der Schwerpunkt und der Umkreismittelpunkt in gerader Linie, und es ist hiebei $HS : SO = 2 : 1$;

6. die drei Fusspunkte der Höhen, die drei Halbierungspunkte der Seiten und die drei Halbierungspunkte der oberen Höhenabschnitte auf einem Kreis (Feuerbachscher Kreis).

§ 48. Harmonische Teilung.

1. Wenn die Strecke AB durch die Punkte P und Q innerlich bezw. äusserlich nach demselben Verhältnis geteilt ist, dann heissen A, B, P, Q harmonische Punkte; A und B, ebenso P und Q heissen zugeordnet. — PQ wird ebenfalls durch A und B in gleichem Verhältnis geteilt.

2. Gehen die Strahlen eines Büschels durch vier harmonische Punkte, so heisst dasselbe ein harmonisches Büschel; je zwei Strahlen, welche durch zwei zugeordnete Punkte gehen, heissen selbst zugeordnet.

3. Zu einem Teilpunkt einer Strecke giebt es nur einen harmonisch zugeordneten Punkt; zu einem Teilstrahl eines Winkels giebt es nur einen harmonisch zugeordneten Strahl.

4. Der zum Halbierungspunkt einer Strecke (in Bezug auf die Endpunkte) harmonisch zugeordnete Punkt ist der unendlich ferne Punkt; der zur Halbierungslinie eines Winkels in Bezug auf die Schenkel harmonisch zugeordnete Strahl ist das Lot zur Halbierungslinie.

5. a) Wenn man zu einem Strahl eines harmonischen Büschels eine Parallele zieht, so wird das Stück derselben zwischen dem andern Paar zugeordneter Strahlen von dem zum ersten zugeordneten Strahl halbiert. (Bestimmung des 4. harmonischen Elementes zu 3 gegebenen.)

b) Umgekehrt: Werden durch drei Strahlen eines Büschels auf einer Geraden gleiche Strecken abgeschnitten und ist der 4. Strahl dieser Geraden parallel, so bilden die vier Strahlen ein harmonisches Büschel.

6. Jede Gerade schneidet ein harmonisches Büschel in harmonischen Punkten.

7. In einer Nebenecke eines vollständigen Vierecks wird der Winkel zweier Gegenseiten durch die Strahlen nach den andern Nebenecken harmonisch geteilt.

8. Auf einer Nebenseite eines vollständigen Vierseits wird der Abstand zweier Gegenecken durch die andern Nebenseiten harmonisch geteilt.

9. Harmonische Proportion, harmonisches Mittel s. § $11_{10, 11}$.

10. Ist M Halbierungspunkt der durch P und Q harmonisch geteilten Strecke AB, so ist:

$$AM^2 = MP \cdot MQ.$$

§ 49. Kreispolaren.

1. Sind A, B, P, Q vier harmonische Punkte und beschreibt man über der Entfernung AB des einen zugeordneten Paares als Durchmesser einen Kreis und errichtet in P ein Lot auf AB, so heisst dieses Lot

die Polare von Q in Beziehung auf den Kreis. — Ebenso ist das Lot in Q die Polare von P; P und Q heissen zugeordnete Pole.

2. Die Berührungssehne der von einem Punkt an einen Kreis gezogenen Tangenten ist Polare jenes Punktes. — Eine Tangente ist Polare ihres Berührungspunktes. — Die Polare des Mittelpunktes ist die unendlich ferne Gerade und der Pol eines Durchmessers ist ein unendlich ferner Punkt.

3. Die Polaren aller Punkte einer Geraden schneiden sich in einem Punkt, dem Pole dieser Geraden.

4. Die Pole aller durch einen Punkt gehenden Geraden liegen auf einer Geraden, der Polaren dieses Punktes.

5. Die Polare des Schnittpunktes zweier Geraden ist die Verbindungslinie der Pole derselben.

6. Der Pol der Verbindungslinie zweier Punkte ist der Schnittpunkt der Polaren derselben.

7. Jede durch einen Punkt gehende Sekante wird durch diesen, durch seine Polare und die Kreislinie harmonisch geteilt.

8. In jedem Sehnenviereck ist eine Nebenecke der Pol zur Verbindungslinie der beiden andern Nebenecken.

9. In jedem Tangentenvierseit ist eine Nebenseite die Polare zum Schnittpunkt der beiden andern Nebenseiten.

§ 50. Ceva-, Menelaos-, Pascal-, Brianchon-Satz.

1. Satz des Ceva: Schneiden sich drei Ecktransversalen eines Dreiecks in einem Punkt innerhalb oder ausserhalb eines Dreiecks, so ist das Produkt dreier

nicht aneinanderliegender Seitenabschnitte gleich dem Produkt der drei andern. — (Umkehrung.)

2. Satz des Menelaos: Schneidet eine Transversale eines Dreiecks die drei Seiten oder ihre Verlängerungen, so ist das Produkt dreier nicht aneinander liegender Seitenabschnitte gleich dem Produkt der drei andern. — (Umkehrung.)

3. Satz des Pascal: Die drei Schnittpunkte je zweier Gegenseiten eines Sehnensechsecks liegen in einer Geraden.

4. Satz des Brianchon: Die drei Verbindungslinien je zweier Gegenecken eines Tangentensechsecks schneiden sich in einem Punkt.

§ 51. Aehnlichkeitspunkte, Potenzlinien (Chordalen).

1. Zieht man in zwei Kreisen zwei gegenläufige oder gleichläufige parallele Halbmesser, so geht die Verbindungslinie der Endpunkte jedes Paares stets für sich durch denselben festen Punkt. Diese beiden Punkte teilen die Centrale innerlich und äusserlich im Verhältnis der Halbmesser; sie heissen innerer bezw. äusserer Aehnlichkeitspunkt.

2. Satz des Monge: Die drei äusseren Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise, ebenso je zwei innere und ein äusserer liegen auf einer Geraden (Aehnlichkeitsachse.)

3. Die Potenzlinie zweier Kreise (d. h. die gerade Linie deren sämtliche Punkte in Bezug auf zwei Kreise gleiche Potenz haben, s. § 42,$_{12a}$.) steht senkrecht auf der Centrale. Wenn gemeinschaftliche, gleichartige Tangenten vorhanden sind, halbiert sie dieselben; schneiden oder berühren sich die Kreise, so ist die Potenz-

linie gemeinschaftliche Sekante oder Tangente im Berührungspunkt; sind die Kreise konzentrisch, so liegt sie in unendlicher Entfernung. Die von einem Punkt der Potenzlinie an die beiden Kreise gezogenen Tangenten sind einander gleich.

4. Die Potenzlinien je zweier von drei gegebenen Kreisen schneiden sich in einem Punkt, dem Potenz- oder Chordalpunkt derselben, oder sie sind parallel.