Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

Stereometrie.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

Stereometrie.

§ 52. Gerade Linien und Ebenen.

1. a) Eine Gerade ist einer Ebene parallel, wenn sie einer in der Ebene liegenden Geraden parallel ist.
   b) Ist eine Gerade einer Ebene parallel, so schneidet jede durch die Gerade gelegte Ebene die erste Ebene in einer parallelen Geraden.
   c) Ist eine Gerade einer Ebene parallel und zieht man durch einen Punkt der Ebene eine Parallele zu der Geraden, so fällt die Gerade ganz in die Ebene hinein.
2. a) Legt man durch jede von zwei Parallelen eine Ebene, welche die andere schneidet, so ist die Schnittlinie der beiden Ebenen den beiden Geraden parallel.
   b) Sind zwei Geraden einer dritten parallel, so sind sie einander selbst parallel.

3. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind die Schnittlinien parallel.

4. Sind die Schenkel zweier Winkel parallel, so sind auch ihre Ebenen parallel.

5. Sind die Schenkel zweier Winkel parallel und beide Paare gleichläufig oder beide gegenläufig, so sind die Winkel gleich; ist das eine Schenkelpaar gleich-, das andere gegenläufig, so sind die Winkel supplementär.

6. Sind zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie einander selbst parallel.

7. a) Steht eine Gerade zu zwei Geraden einer Ebene senkrecht, so steht sie auf allen in der Ebene liegenden Geraden senkrecht, d. h. sie ist senkrecht zur Ebene.

   b) Alle Geraden, welche in demselben Punkt zu einer Geraden senkrecht sind, liegen in einer Ebene, die senkrecht ist zu der Geraden.

8. Zu einer Ebene lässt sich durch einen Punkt auf oder ausserhalb derselben nur ein Lot ziehen.

9. Zu einer Geraden lässt sich durch einen auf oder ausserhalb derselben gelegenen Punkt nur eine senkrechte Ebene legen.

10. a) Jede Ebene durch ein Lot zu einer Ebene ist zu dieser Ebene senkrecht.

    b) Eine Gerade, welche innerhalb einer von zwei zu einander senkrechten Ebenen senkrecht zu deren Schnittlinie ist, ist auch senkrecht zur andern Ebene.

    c) Eine Gerade, welche senkrecht zu einer von zwei senkrechten Ebenen ist, fällt ganz in die andere oder ist ihr parallel.

    d) Sind zwei sich schneidende Ebenen senkrecht zu einer dritten, so ist auch ihre Schnittlinie senkrecht zur dritten.

11. Ist ein Winkel, dessen einer Schenkel in der Projektionsebene liegt ein R, so ist auch der Winkel selbst ein R; umgekehrt ist die Projektion ein R, so ist der Winkel selbst ein R.

12. a) Stehen zwei Geraden auf derselben Ebene senkrecht, so sind sie parallel.

    b) Ist die eine von zwei parallelen Geraden senkrecht zu einer Ebene, so ist es auch die andere.

13. a) Stehen zwei Ebenen auf derselben Geraden senkrecht, so sind sie parallel.

b) Ist die eine von zwei parallelen Ebenen zu einer Geraden senkrecht, so ist es auch die andere.

14. Das Lot von einem Punkt auf eine Ebene ist die kürzeste Strecke zwischen Punkt und Ebene und umgekehrt.

15. Diejenigen Strecken zwischen einer Ebene und einem Punkt ausserhalb derselben sind einander gleich, deren Endpunkte von der Projektion des ersten Punktes gleichweit entfernt sind und umgekehrt.

Die gleichen Strecken machen mit der Ebene gleiche Winkel und umgekehrt.

16. Von zwei von einem Punkt nach einer Ebene gezogenen Strecken ist diejenige die kleinere, deren Endpunkt näher bei der Projektion jenes Punktes liegt und umgekehrt.

Die kleinere der Strecken macht mit der Ebene den grösseren Winkel und umgekehrt.

17. Der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene ist kleiner als der Winkel der Geraden mit irgend einer Geraden in der Ebene.

18. Alle parallelen Strecken zwischen zwei parallelen Ebenen sind gleich und machen mit derselben Ebene gleiche Winkel.

19. Die kürzeste Strecke zwischen zwei windschiefen Geraden ist diejenige, die auf beiden Geraden senkrecht steht.

20. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so sind:

a) entsprechende Keile
b) innere Wechselkeile } einander gleich,
c) äussere "

und d) innere Gegenkeile, e) äussere „, f) gemischte Wechselkeile betragen zusammen 2 rechte Keile.

Jeder der sechs Sätze ist umkehrbar.

§ 53. Kugel-, Cylinder-, Kegelfläche.

A. Lagebeziehungen.

1. Ein Punkt liegt innerhalb, auf, ausserhalb einer Kugel, eine Gerade und ebenso eine Ebene schneidet, berührt, liegt ganz ausserhalb der Kugel, je nachdem der Mittelpunktsabstand $\lesseqgtr$ r ist: (r Halbm.)

2. Ein Punkt und ebenso eine zur Achse parallele Gerade liegt innerhalb, auf, ausserhalb einer Cylinderfläche, eine zur Achse nicht parallele Gerade und eine zur Achse parallele Ebene schneidet, berührt sie, trifft sie nicht, je nach dem der Abstand von der Achse $\lesseqgtr$ r ist. (r Grundkreishalbm.)

3. Eine durch die Spitze eines Kegels gehende Gerade liegt innerhalb, auf, ausserhalb einer Kegelfläche, eine durch die Spitze gehende Ebene schneidet, berührt sie, trifft sie nicht, je nachdem der Winkel der Geraden oder der Ebene mit der Achse $\lesseqgtr$ der erzeugende Winkel α ist.

4. Eine Ebene welche eine Kugel schneidet, schneidet sie in einer Kreislinie. — Eine zur Achse parallele Schnittebene einer Cylinderfläche schneidet diese in zwei zur Achse parallelen Mantellinien. — Eine durch die Spitze eines Kegels gehende Schnittebene schneidet die Kegelfläche in zwei Mantellinien.

5. Eine Berührungsebene an eine Kugel ist (u. a.) bestimmt durch zwei Tangenten, eine Berührungsebene

an eine Cylinder- und ebenso an eine Kegelfläche ist bestimmt durch Berührungsmantellinie und Grundkreistangente.

6. Das Lot vom Kugelmittelpunkt auf eine Kreisebene, Berührungsebene, Sehne der Kugel geht bezw. durch den Kreismittelpunkt, Berührungspunkt, Halbierungspunkt derselben.

Umkehrungen.

7. Zwei Kugeln berühren sich, wenn sie einen Punkt der Centrale gemeinschaftlich haben und umgekehrt.

Die Centrale zweier sich berührender Kugeln ist gleich der Summe oder gleich der Differenz der Halbmesser.

8. Ein Punkt der Kugelfläche ist Pol eines Kugelkreises, wenn er von drei Punkten desselben gleiche sphärische Entfernungen hat; er ist Pol eines Grosskreises, wenn er von zwei Punkten desselben sphärische Entfernungen von 90^0 hat.

B. Grössenbeziehungen.

9. Der Grosskreisbogen ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten auf der Kugelfläche.

10. Ist ein sphärisches Dreick Polardreieck zu einem zweiten, so ist auch das zweite Polardreieck zum ersten.

11. Die Bogengrade der Seiten eines sphärischen Dreiecks ergänzen die Winkelgrade der entsprechenden Winkel des Polardreiecks und die Winkelgrade des sphärischen Dreiecks ergänzen die Bogengrade der entsprechenden Seiten des Polardreiecks zu 180^0.

(Nr. 10 und 11 gelten ebenso für Dreikant und Polardreikant.)

12. Zwei sphärische Dreiecke gleicher Kugeln oder zwei Dreikante sind entsprechend gleich, wenn

a) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel,
b) eine Seite und zwei anliegende Winkel,
c) die drei Seiten,
d) die drei Winkel,
e) zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen gleich sind und der Gegenwinkel der andern in beiden zugleich $\lesseqgtr 90^0$ ist,
f) zwei Winkel und die Gegenseite des einen gleich sind und die Gegenseite des andern in beiden zugleich $\lesseqgtr 90^0$ ist.

13. In jedem sphärischen Dreieck und jedem Dreikant

a) liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber und umgekehrt,
b) liegt dem grösseren Winkel die grössere Seite gegenüber und umgekehrt,
c) sind zwei Seiten zusammen grösser als die dritte,
d) sind zwei Winkel zusammen kleiner als der um 2 R vermehrte dritte,
e) ist, wenn die Summe zweier Seiten $\gtrless 180^0$, auch die Summe der Gegenwinkel $\gtrless 180^0$ und umgekehrt.

14. Ein sphärisches Zweieck verhält sich zur Kugeloberfläche wie sein Winkel zu 4 R; oder

$$\text{sphär. Zweieck} = 2\,R^2 \operatorname{arc} \alpha$$

15. Der Inhalt des sphärischen Dreiecks verhält sich zur Kugeloberfläche wie der sphärische Exzess zu 8 R; oder

$$\text{sphär. Dreieck} = R^2 \operatorname{arc} (\alpha + \beta + \gamma - 2\,R)$$

16. In einem sphärischen Dreieck liegt
   a) die Summe der Winkel zwischen 2 R und 6 R
   b) „ „ „ Seiten „ 0 und 4 R.

§ 54. Geometrische Oerter.

1. Eine um Punkt A mit dem Halbmesser r beschriebene Kugel ist geometrischer Ort
   a) für jeden Punkt, der von A den Abstand r hat,
   b) „ jede Gerade, die „ „ „ „ „ „
   c) „ „ Ebene, „ „ „ „ „ „ „
   d) „ den Mittelpunkt jeder Kugel vom Halbmesser r, die durch A geht.
2. Eine um die Gerade L als Achse mit dem Grundkreishalbmesser r beschriebene Cylinderfläche ist geometrischer Ort
   a) für jeden Punkt, der von L den Abstand r hat,
   b) „ jede Gerade, die „ „ „ „ „ „
   c) „ „ Ebene, „ „ „ „ „ „ „
   d) „ den Mittelpunkt jeder Kugel vom Halbmesser r, die L berührt.
3. Eine Kegelfläche mit der Achse L, der Spitze A und dem erzeugenden Winkel α ist geometrischer Ort
   a) für jede durch A gehende Gerade, welche mit L den Winkel α bildet,
   b) für jede durch A gehende Ebene, welche mit L den Winkel α bildet,
   c) für jede durch A gehende Ebene, welche mit einer zu L senkrechten Ebene den Winkel $R - \alpha$ bildet.
4. Eine zu einer Ebene E im Abstand r auf einer Seite derselben parallel gelegte Ebene ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt auf dieser Seite, der von E den Abstand r hat,
b) für jede parallele Gerade auf dieser Seite, die von E den Abstand r hat,
c) für den Mittelpunkt jeder Kugel auf dieser Seite, die E berührt und den Halbmesser r hat,
d) für die Achse jedes Cylinders auf dieser Seite, der den Grundkreishalbmesser r hat und E berührt.

5. Die Mittellotebene zu einer Strecke AB ist geometrischer Ort
a) für jeden Punkt, der von A und B gleiche Entfernungen hat,
b) für jede Gerade, die von A und B gleiche Entfernungen hat und mit AB einen rechten Winkel bildet,
c) den Mittelpunkt jeder Kugel die durch A und B geht.

6. Die Mittellotebene zu einem Winkel ABC ist geometrischer Ort
a) für jeden Punkt, der von den Schenkeln gleichen Abstand hat,
b) für jede durch B gehende Gerade, die mit den Schenkeln gleiche Winkel bildet,
c) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche beide Schenkel berührt.

7. Die Halbierungsebene eines Keils (MQ) ist geometrischer Ort
a) für jeden Punkt, der von M und Q gleichen Abstand hat,
b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche M und Q berührt.

8. Das Lot zur Ebene eines Dreiecks ABC im

Umkreismittelpunkt O desselben ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von A, B und C gleiche Abstände hat,

b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, die durch A, B und C geht.

9. Das Lot zur Ebene eines Dreiecks ABC im Inkreismittelpunkt oder einem Ankreismittelpunkt desselben ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von den drei Seiten gleiche Entfernungen hat,

b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche die drei Seiten berührt.

10. Die Schnittlinie der drei Mittellotebenen der Seiten eines Dreikants ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von den drei Kanten gleiche Abstände hat,

b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche die drei Kanten berührt. Die Schnittlinie ist Achse des dem Dreikant umbeschriebenen Kegels.

11. Die Schnittlinie der Halbierungsebenen der drei Keile eines Dreikants ist geometrischer Ort

a) für jeden Punkt, der von den drei Seitenflächen gleichen Abstand hat,

b) für den Mittelpunkt jeder Kugel, welche die drei Seitenflächen berührt.

Die Schnittlinie ist Achse des dem Dreikant einbeschriebenen Kegels.

§ 55. Sätze über Polyeder. Formeln für Oberflächen, Rauminhalt.

A. Allgemeine Sätze.

1. Eulers Satz: Bei jedem Vielflächner ist die Summe der Anzahl der Ecken und Flächen um 2 grösser als die Zahl der Kanten,

$$E + F = K + 2.$$

2. Die Anzahl der Kanten ist halb so gross als die der Winkel,

$$K = \frac{1}{2} W.$$

3. Ein Parallelschnitt einer Pyramide ist ein der Grundfläche ähnliches Vieleck und es verhält sich der Inhalt des Parallelschnittes zu dem der Grundfläche wie die Quadrate ihrer Entfernungen oder derjenigen entsprechender Ecken von der Spitze der Pyramide.

4. Satz des Cavalieri: Haben zwei Körper gleiche Höhe und gleiche Grundflächen und sind alle Parallelschnitte, die in denselben Entfernungen von den entsprechenden Grundflächen gelegt sind, einander gleich, so sind die Körper selbst inhaltsgleich.

5. Aehnliche Körper verhalten sich der Oberfläche nach wie die Quadrate, dem Inhalt nach wie die Kuben entsprechender Längen.

B. Berechnungen.

M Mantel, O Oberfläche, G Grundfläche, Q Querschnitt, h Höhe, r Grundkreishalbmesser, R Kugelhalbmesser, a, b, c Kanten, s Mantellinie, S Mittelschnitt, V Rauminhalt.

6. Quader. $O = 2(ab + bc + ca)$
$V = 3abc$

7. Prisma. $V = G.h = Qs$

8. Pyramide. $V = G \cdot \frac{h}{3}$

9. Cylinder. $M = 2 r \pi h$

$O = 2 r \pi (h + r)$

$V = r^2 \pi h.$

Für den Hohlcylinder

$V = (r^2 - r_1^{\,2}) \pi h$

10. Kegel. $M = r \pi s$

$O = r \pi (s + r)$

$s = \sqrt{r^2 + h^2}$

$V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$

11. Pyramidenrumpf.

$$V = \frac{h}{3} (G + \sqrt{G G_1} + G_1)$$

12. Kegelrumpf.

$M = (r + r_1) \pi s = 2 p \pi h$

(p Mittellot zur Mantellinie bis zur Achse.)

$$V = \frac{\pi h}{3} (r^2 + r r_1 + r_1^{\,2})$$

13. Prismatoid.

$$V = \frac{h}{6} (G + G_1 + 4 S)$$

14. Schiefabgeschnittenes dreiseit. Prisma.

$$V = Q \cdot \frac{a + b + c}{3}$$

15. Kugel. $O = 4 R^2 \pi$

$$V = \frac{4 R^3 \pi}{3}$$

Kugelzone. $O = 2 R \pi h$

$$V = \frac{\pi h}{6} (3 r^2 + 3 r_1^{\,2} + h^2)$$

Kugelabschnitt.

$$O = 2 R \pi h = (r^2 + h^2) \pi$$

$$V = \frac{\pi h}{6}(3 r^2 + h^2) = \frac{\pi h^2}{3}(3 R - h)$$

Kugelausschnitt.

$$V = \frac{2}{3} R^2 \pi h$$

Kugelkeil. $V = \frac{\pi R^3 . \alpha}{270}$

16. Guldins Sätze. a) Die Oberfläche einer Drehfläche ist gleich dem Produkt aus der Länge der erzeugenden Linie und dem Wege des Schwerpunkts derselben.

Besteht die Erzeugende aus den Teilen $l_1, l_2, l_3 \ldots$, deren Schwerpunkte die Abstände $s_1, s_2, s_3 \ldots$ von der Achse haben, während der Abstand des Gesamtschwerpunktes der Erzeugenden s ist, so ist

$$s(l_1 + l_2 + l_3 + \ldots) = s_1 l_1 + s_2 l_2 + s_3 l_3 + \ldots$$

b) Der Inhalt eines Drehkörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der erzeugenden Fläche und dem Weg des Schwerpunktes derselben.

Zerlegt man die erzeugende Fläche i in die Teile i_1, $i_2, i_3 \ldots$ und sind die Achsenabstände der Schwerpunkte der ganzen Fläche und der Teile $s, s_1, s_2, s_3 \ldots$, so ist

$$si = s_1 i_1 + s_2 i_2 + s_3 i_3 + \ldots$$

17. Regelmässige Körper. R Halbmesser der umbeschriebenen, r derjenige der einbeschriebenen Kugel, a Kante.

Tetraeder. $R = \frac{a}{4}\sqrt{6}$; $r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$;

$$O = a^2 \sqrt{3}; \quad V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$$

Würfel. $R = \frac{a}{2}\sqrt{3}$; $r = \frac{a}{2}$;

$O = 6a^2$; $V = a^3$.

Oktaeder. $R = \frac{a}{2}\sqrt{2}$; $r = \frac{a}{6}\sqrt{6}$;

$O = 2a^2\sqrt{3}$; $V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$.

Dodekaeder. $R = \frac{a}{4}(1 + \sqrt{5})\sqrt{3}$;

$$r = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{5}} = a \operatorname{ctg} 36^0 \cos 36^0;$$

$$O = 3a^2\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})};$$

$$V = \frac{12\,F\,.\,r}{3} = 4\,F\,.\,r \text{ (F Seitenfläche)}$$

$$= \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}) = 5a^3 \operatorname{ctg}^2 36^0 \cos 36^0.$$

Isokaeder. $R = \frac{a}{4}\sqrt{2(5 + \sqrt{5})}$;

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}} = \frac{a}{4}\cdot\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2a\cos^2 36^0}{\sqrt{3}};$$

$$O = 5a^2\sqrt{3};$$

$$V = \frac{20.F.r}{3} = \frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5});$$

$$= \frac{10a^3}{3}\cos^2 36^0.$$
