Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 11. Proportionen.

§ 9. Klammerlose Ausdrücke.

1. Kommen in einem Ausdruck nur Rechenzeichen gleicher Stufe vor (nur + und — oder nur . und :), so darf die Reihenfolge der Glieder beliebig geändert werden, doch darf kein Divisor erstes Glied werden (s. § 5_3 und § 8_3).

2. Der Gang der Rechnung ist von links nach rechts, die höhere Rechenweise ist vor der niederen auszuführen.

§ 10. Brüche.

$$\text{Erklärung: } \begin{cases} \frac{a}{b} \cdot b = a \\ \frac{ab}{b} = a \end{cases}$$

$$1. \begin{cases} \frac{a}{a} = 1, \quad \frac{a}{1} = a, \quad \frac{0}{a} = 0 \\ \frac{a}{0} = \infty \text{ (s. § } 7{,}_2\text{)}, \quad \frac{0}{0} = \text{unbestimmte Zahl.} \end{cases}$$

$$2. \frac{a}{x} \pm \frac{b}{x} = \frac{a \pm b}{x}$$

$$3. a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}, \quad \frac{b}{c} \cdot a = \frac{ba}{c}$$

$$4. \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$$

$$5. a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$$

$$6. \frac{an}{bn} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a:n}{b:n} = \frac{a}{b}$$

$$7. \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$8.\ \begin{cases} +\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}, \quad +\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b} \\ +\frac{+a}{-b} = +\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}, \quad -\frac{+a}{-b} = -\frac{-a}{+b} = +\frac{a}{b} \\ \frac{a-b}{c-d} = \frac{b-a}{d-c} = -\frac{b-a}{c-d} = -\frac{a-b}{d-c} \end{cases}$$

§ 11. Proportionen.

Wenn $a : b = c : d$, dann ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und

1. $a : c = b : d$,	$c : a = d : b$,
$b : a = d : c$,	$c : d = a : b$,
$b : d = a : c$,	$d : b = c : a$,
	$d : c = b : a$, d. h.:

In einer Proportion kann man die inneren Glieder unter sich, die äussern Glieder unter sich vertauschen und es dürfen die inneren Glieder zu äusseren, und die äusseren zu inneren gemacht werden.

2. $ad = bc$, d. h.:

Das Produkt der äusseren Glieder ist gleich dem Produkt der inneren.

Umgekehrt: Sind zwei Produkte aus je zwei Faktoren einander gleich, so kann aus denselben eine Proportion gebildet werden. Die Faktoren des einen Produkts werden die äusseren, die des andern die innern Glieder der Proportion.

3. $am : bm = c : d$,	$(a : m) : (b : m) = c : d$,
$am : b = cm : d$,	$(a : m) : b = (c : m) : d$, d. h.:

In einer Proportion darf ein inneres und ein äusseres Glied zugleich mit derselben Zahl multipliziert oder dividiert werden.

4. $a^n : b^n = c^n : d^n$,	$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.

5. Korrespondierende Addition:

$$a : (a + b) = c : (c + d) \quad | \quad b : (a + b) = d : (c + d).$$

Korrespondierende Subtraktion:

$$a : (a - b) = c : (c - d) \quad | \quad b : (a - b) = d : (c - d).$$

Korrespondierende Addition und Subtraktion:

$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d).$$

Das erste oder zweite Glied einer Proportion verhält sich zur Summe oder Differenz des ersten und zweiten, wie das dritte oder vierte Glied zur Summe oder Differenz des dritten und vierten.

Die Summe des ersten und zweiten Glieds verhält sich zur Differenz derselben wie die Summe des dritten und vierten Glieds zur Differenz derselben.

6. Wenn $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = \ldots = w : 1$, dann ist

$$(a + b + c + \ldots) : (a_1 + b_1 + c_1 + \ldots) = a : a_1 = \ldots = w : 1,$$

und

$$(am + bn + cp + \ldots) : (a_1 m + b_1 n + c_1 p + \ldots) = a : a_1 = \ldots w : 1.$$

7. Wenn

$$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ a_1 : b_1 = c_1 : d_1, \text{ dann ist} \\ \hline \left\{ \begin{array}{l} (a\,a_1) : (b\,b_1) = (c\,c_1) : (d\,d_1) \text{ und} \\ (a : a_1) : (b : b_1) = (c : c_1) : (d : d_1). \end{array} \right. \end{array}$$

8. Wenn

$$\begin{array}{c} a : b = c : d \text{ und} \\ a : b = c : x, \text{ dann ist} \\ \hline x = d. \end{array}$$

9. Stetige Proportion: $a : x = x : b$.

10. Harmonische Proportion:

$$(a - b) : (c - d) = a : d;$$

stetige harmonische Proportion:

$$(a - x) : (x - b) = a : b.$$

11. a) Arithmetisches Mittel aus a und b:

$$x = \frac{a + b}{2}.$$

b) Geometrisches Mittel aus a und b:

$$x = \sqrt{a\,b}.$$

c) Harmonisches Mittel aus a und b:

$$x = \frac{2\,a\,b}{a + b}, \text{ also } \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

Bei drei Grössen a, b, c ist

$$\text{a) } x = \frac{a + b + c}{3}, \quad \text{b) } x = \sqrt[3]{a\,b\,c}, \quad \text{c) } \frac{1}{x} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

§ 12. Potenzen mit ganzen Exponenten.

I. Positive, ganze Exponenten.

$$\begin{cases} a^3 = a \,.\, a \,.\, a \\ a^m = a \,.\, a \ldots\ldots a \text{ (m Faktoren)}, \end{cases}$$

a heisst Basis, m Exponent, a^m Potenz.

1. $a^1 = a,\ 0^n = 0,\ 1^n = 1,\ a^0 = 1;\ a^\infty = \begin{cases} 0 \\ 1, \text{ wenn } a \lesseqgtr 1. \\ \infty \end{cases}$

2. $\begin{cases} (-1)^{2n} = +1, \quad (-1)^{2n+1} = -1 \\ (-a)^{2n} = +a^{2n}, \quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1} \\ (a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}, \quad (a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1}. \end{cases}$

3. $a^m \,.\, a^r = a^{m+r}$

$$a^m : a^r = \begin{cases} a^{m-r}, & \text{wenn } m > r \\ 1, & \text{„} \quad m = r \\ \dfrac{1}{a^{r-m}}, & \text{„} \quad m < r \end{cases}$$

4. $(a\,b)^m = a^m\,b^m$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$

6. $(a^m)^r = a^{m\,r}$