Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 12. Potenzen mit ganzen Exponenten.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

11. a) Arithmetisches Mittel aus a und b:

$$x = \frac{a+b}{2}.$$

b) Geometrisches Mittel aus a und b:

$$x = \sqrt{a\,b}.$$

c) Harmonisches Mittel aus a und b:

$$x = \frac{2\,a\,b}{a+b},\ \text{also}\ \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

Bei drei Grössen a, b, c ist

$$a)\ x = \frac{a+b+c}{3},\quad b)\ x = \sqrt[3]{a\,b\,c},\quad c)\ \frac{1}{x} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

§ 12. Potenzen mit ganzen Exponenten.

I. Positive, ganze Exponenten.

$$\begin{cases} a^3 = a\,.\,a\,.\,a \\ a^m = a\,.\,a\,......\,a \text{ (m Faktoren)}, \end{cases}$$

a heisst Basis, m Exponent, a^m Potenz.

1. $a^1 = a,\ 0^n = 0,\ 1^n = 1,\ a^0 = 1;\ a^\infty = \begin{cases} 0 \\ 1, \text{ wenn } a \lesseqgtr 1. \\ \infty \end{cases}$

2. $\begin{cases} (-1)^{2n} = +1, & (-1)^{2n+1} = -1 \\ (-a)^{2n} = +a^{2n}, & (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1} \\ (a-b)^{2n} = (b-a)^{2n}, & (a-b)^{2n+1} = -(b-a)^{2n+1}. \end{cases}$

3. $a^m\,.\,a^r = a^{m+r}$

$$a^m : a^r = \begin{cases} a^{m-r}, & \text{wenn } m > r \\ 1, & \text{,, } m = r \\ \frac{1}{a^{r-m}}, & \text{,, } m < r \end{cases}$$

4. $(a\,b)^m = a^m\,b^m$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

6. $(a^m)^r = a^{m\,r}$

7. $\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}$.

8. $\left.\frac{a^m - b^m}{a - b}\right|_{a=b} = \frac{0}{0} = m a^{m-1}$.

II. Negative Exponenten.

Erklärung: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

1. $\begin{cases} a^m \cdot a^{-r} = a^{m-r} \\ a^{-m} \cdot a^r = a^{-m+r} \\ a^{-m} \cdot a^{-r} = a^{-m-r} = a^{-(m+r)}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} a^m : a^{-r} = a^{m+r} \\ a^{-m} : a^r = a^{-m-r} \\ a^{-m} : a^{-r} = a^{-m+r}. \end{cases}$

3. $(ab)^{-m} = a^{-m}b^{-m}$.

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$.

5. $\begin{cases} (a^m)^{-r} = a^{-mr} \\ (a^{-m})^r = a^{-mr} \\ (a^{-m})^{-r} = a^{mr}. \end{cases}$

§ 13. Wurzeln.

Erklärung: Wenn $x^n = a$, dann $x = \sqrt[n]{a}$, also

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \quad \sqrt[n]{a^n} = a$$

Benennungen: Bei $\sqrt[n]{a}$ heisst a Radikand, n Wurzelexponent;

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$$

I. Wurzelformeln:

1. $\sqrt[n]{1} = 1$; $\sqrt[n]{0} = 0$; $\sqrt[2n+1]{1} = 1$; $\sqrt[2n+1]{-1} = -1$.