Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 15. Imaginäre und Komplexe Zahlen.

4. $(ab)^{\frac{r}{n}} = a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{r}{n}}$.

5. $(a : b)^{\frac{r}{n}} = a^{\frac{r}{n}} : b^{\frac{r}{n}}$.

6. $\left(a^{\frac{r}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{n} \cdot \frac{p}{q}}$.

§ 15. Imaginäre und komplexe Zahlen.

Erklärung: $\sqrt{-1} = i$ (imaginäre Einheit),
$\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$ (imaginäre Zahl),
$a + bi$ (komplexe Zahl; Normalform).

1. $i = i$ $\qquad i^{4n} = +1$
$i^2 = -1$ $\qquad i^{4n+1} = i$
$i^3 = -i$ $\qquad i^{4n+2} = -1$
$i^4 = +1$ $\qquad i^{4n+3} = -i$.

2. $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = i^2\sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$; $(\sqrt{-a})^2 = -a$;
$\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{a : b}$.

3. Konjugierte komplexe Zahlen: $a + bi$ und $a - bi$,
$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

4. Wenn $a + bi = 0$, dann ist $a = 0$ und $b = 0$,
„ $a + bi = x + iy$, dann ist $a = x$, $b = y$.

5. Setzt man: $a = r \cos\varphi$ (φ Anomalie),
$b = r \sin\varphi$ (r Modulus),
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$, dann ist
$\underline{a \pm bi = r(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)}$ (Kanonische Form)

allgemeiner:

$$\mathbf{a \pm bi = r\left((\cos\varphi + 2k\pi) \pm i \sin(\varphi + 2k\pi)\right)}.$$

6. $(\cos\varphi \pm i \sin\varphi)(\cos\psi \pm i \sin\psi)$
$= \cos(\varphi + \psi) \pm i \sin(\varphi + \psi)$.

7. Moivre's Formel:

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}(2k\pi+\varphi) \pm i\sin\frac{m}{n}(2k\pi+\varphi);$$

im einzelnen: $(\cos\varphi \pm \sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi$

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi+\varphi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi+\varphi}{n}.$$

§ 16. Logarithmen.

Erklärung: Wenn $c^x = a$, dann ist $x = \overset{c}{\log}\, a$, daher

$$c^{\overset{c}{\log}\, a} = a;\quad \overset{c}{\log}\,(c^n) = n;\quad \overset{c}{\log}\,(c^{-n}) = -n$$

c heisst die Basis, a der Logarithmand, n der Logarithmus.

1. $\log ab = \log a + \log b$
2. $\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$
3. $\log a^n = n \log a$
4. $\log\sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log a$
5. $\overset{c}{\log}\, c = 1;\ \overset{c}{\log} 1 = 0;\ \overset{c}{\log} 0 = -\infty;\ \overset{c}{\log} \infty = \infty$
6. die Basis der künstlichen, oder gemeinen, oder Briggschen Logarithmen ist 10; die Basis der natürlichen Logarithmen, welche mit log nat, oder log n oder l bezeichnet werden, ist $e = 2{,}71828\ldots$ (s. § 29)
7. $\overset{b}{\log}\, a = \dfrac{\overset{c}{\log}\, a}{\overset{c}{\log}\, b};\quad \overset{c}{\log}\, a = \overset{b}{\log}\, a \,.\, \overset{c}{\log}\, b$
8. Umrechnung der gemeinen in natürliche Logarithmen:

a) $l\,10 = \overset{e}{\log}\,10 = \dfrac{\overset{10}{\log}\,10}{\overset{10}{\log}\, e} = \dfrac{1}{0{,}43429\ldots} = 2{,}30259\ldots$