Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 17. Ketenbrüche.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

$$\text{b) } l\,a = \overset{e}{\log}\, a = \frac{\overset{10}{\log}\, a}{\overset{10}{\log}\, e} = \overset{10}{\log}\, a \,.\, 2{,}30259\ldots$$

Weiteres über Logarithmen s. § 29.

§ 17. Kettenbrüche.

1. Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Kettenbruch:

$$\text{a) } \frac{14}{47} = \frac{1}{\frac{47}{14}} = \frac{1}{3+\frac{5}{14}} = \frac{1}{3+\frac{1}{\frac{14}{5}}} = \frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{4}{5}}}$$

$$= \frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{5}{4}}}} = \frac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}}$$

$$\text{b) } \begin{array}{r|r|r|r|l} 14 & 47 & 3 & & \\ & 42 & & & \\ \hline & 5 & 14 & 2 & \\ & & 10 & & \\ \hline & & 4 & 5 & 1 \\ & & & 4 & \\ \hline & & & 1 & 4 \;|\; 4 \end{array}$$

die Nenner sind 3, 2, 1, 4.

2. Statt eines Kettenbruches k kann man stets folgenden schreiben:

$$\frac{1}{0+\frac{1}{0+k}},$$ dessen erster Näherungswert $\frac{1}{0}$, dessen zweiter $\frac{0}{1}$ ist.

3. Verwandlung eines Kettenbruches in einen gewöhnlichen Bruch.

Sind $\frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}$ u. s. f. die einzelnen Näherungswerte des Kettenbruches $\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$, so ist:

$$\frac{A_{r+1}}{B_{r+1}} = \frac{a_{r+1} A_r + A_{r-1}}{a_{r+1} B_r + B_{r-1}}; \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{1}{a_1}; \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{a_2}{a_2 a_1 + 1}$$

u. s. f.

Schema:

$$\begin{array}{c|c||c|c|c}
 & & a_1 & a_2 & a_3 \\
\hline
\frac{1}{0} & \frac{0}{1} & \frac{1}{a_1} & \frac{a_2}{a_2 a_1 + 1} & \frac{a_3 a_2 + 1}{a_3 (a_2 a_1 + 1) + a_1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c||c|c|c|c}
 & & 3 & 2 & 1 & 4 \\
\hline
\frac{1}{0} & \frac{0}{1} & \frac{1}{3} & \frac{2}{7} & \frac{3}{10} & \frac{14}{47}
\end{array}$$

4. $A_{r-1} . B_r - A_r . B_{r-1} = (-1)^r$

$$\frac{A_{r-1}}{B_{r-1}} - \frac{A_r}{B_r} = \frac{(-1)^r}{B_{r-1} . B_r}$$

$$\frac{A_{r-1}}{B_{r-1}} - \frac{A_r}{B_r} < \frac{(-1)^r}{B^2_{r-1}}$$

5. Sätze:
   1. Die aufeinanderfolgenden Näherungswerte (N.-W.) eines Kettenbruches sind abwechselnd grösser und kleiner als der wahre Wert derselben und zwar sind die ungeraden (der 1., 3. . . .) grösser, die geraden (der 2., 4. . . . .) kleiner als der wahre Wert des Kettenbruches.
   2. Jeder N.-W. liegt dem wahren Wert des K.-Br. näher als der vorhergehende.
   3. Der Unterschied des wahren Wertes des K.-Br.

und eines N.-W. ist kleiner als der reziproke Wert des Quadrates vom Nenner dieses N.-W.

4. Die N.-W. eines K.-Br. sind in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, d. h. Zähler und Nenner sind relative Primzahlen.
5. Kein Bruch, dessen Nenner kleiner ist als der Nenner eines N.-W., kommt dem wahren Wert des K.-Br. näher als dieser N.-W.

§ 18. Kombinationslehre.

I. Permutationen.

1. Die Permutationen aus n Elementen bestehen aus den Komplexionen, in denen sämtliche Elemente vorkommen; die Gruppen unterscheiden sich nur durch die Stellung der Elemente.

Die Permutationen von a, b, c, d sind:

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

2. Die Anzahl der Permutationen aus n verschiedenen Elementen ist:

$$P(n) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1) \,.\, n$$
$$= n! \text{ („n Fakultät")}$$

3. Sind unter den nElementen α unter sich gleiche Elemente, ebenso ferner β und γ je unter sich gleiche Elemente, so ist die Anzahl der Permutationen:

$$\underset{(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}{P\ (n)} = \frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!}$$

Bestehen die n Elemente aus 2 Gruppen von r und n — r je unter sich gleichen Elementen, dann ist die Anzahl: