Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 18. Kombinationslehre.

und eines N.-W. ist kleiner als der reziproke Wert des Quadrates vom Nenner dieses N.-W.
4. Die N.-W. eines K.-Br. sind in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, d. h. Zähler und Nenner sind relative Primzahlen.
5. Kein Bruch, dessen Nenner kleiner ist als der Nenner eines N.-W., kommt dem wahren Wert des K.-Br. näher als dieser N.-W.

§ 18. Kombinationslehre.

I. Permutationen.

1. Die Permutationen aus n Elementen bestehen aus den Komplexionen, in denen sämtliche Elemente vorkommen; die Gruppen unterscheiden sich nur durch die Stellung der Elemente.

Die Permutationen von a, b, c, d sind:

abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcba

2. Die Anzahl der Permutationen aus n verschiedenen Elementen ist:

$$P(n) = 1 . 2 . 3 \ldots (n-1) . n$$
$$= n! \text{ („n Fakultät")}$$

3. Sind unter den nElementen α unter sich gleiche Elemente, ebenso ferner β und γ je unter sich gleiche Elemente, so ist die Anzahl der Permutationen:

$$\underset{(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}{P\ (n)} = \frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!}$$

Bestehen die n Elemente aus 2 Gruppen von r und n — r je unter sich gleichen Elementen, dann ist die Anzahl:

$$\underset{(r,\, n-r)}{P(n)} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$$
$$= \binom{n}{r},\ \text{vergl. § 21.}$$

4. Irgend zwei Elemente einer Komplexion bilden eine Nichtfolge (Inversion), wenn das erste Element höher ist als das zweite.

Durch Vertauschung zweier Elemente einer Komplexion ändert sich die Zahl der Nichtfolgen um eine ungerade Zahl.

II. Variationen.

5. Die Variationen aus n Elementen der rten Klasse bestehen aus allen Komplexionen, die sich aus je r der n Elemente bilden lassen. Die Variationen zweiter Klasse der 4 Elemente a b c d sind:

ohne Wiederholung			mit Wiederholung			
ab	ac	ad	aa	ab	ac	ad
ba	bc	bd	ba	bb	bc	bd
ca	cb	cd	ca	cb	cc	cd
da	db	dc	da	db	dc	dd

6. Die Anzahl der Variationen aus n Elementen zur rten Klasse ist

$$V_r(n) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \binom{n}{r}.r!\ \text{(s. § 21)}$$
$$V_n(n) = n(n-1)(n-2)\dots 1 = n!\ \text{(Permutationen).}$$

7. Die Anzahl der Variationen mit Wiederholung ist: $V_r'(n) = n^r$.

III. Kombinationen.

8. Die Kombinationen aus n Elementen zur rten Klasse sind die Komplexionen, die sich aus je r der

n Elemente bilden lassen, wobei aber blosse Verstellung der Glieder keine neue Kombination ergiebt.

Die Kombinationen der vier Elemente a, b, c, d zur zweiten Klasse sind:
ohne Wiederholung: ab, ac, ad, bc, bd, cd;
mit „ aa, ab, ac, ad; bb, bc, bd; cc, cd; dd.

9. Die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur rten Klasse ist

$$K_r(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Aus den Kombinationen ergeben sich die Variationen, wenn man die Elemente der einzelnen Kombinationen permutiert.

10. Die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur rten Klasse mit Wiederholung ist

$$K'_r(n) = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{r!} = \binom{n+r-1}{r}.$$

§ 19. Determinanten.

1. $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Unter der Determinante eines Systems von n^2 Elementen $a_1, a_2, \ldots a_n$, $b_1, b_2, \ldots b_n$, ... versteht man die Summe $\Sigma(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots)$, in welcher jedes Glied alle Buchstaben und Indices ohne Wiederholung enthält und welche zugleich alle möglichen Produkte umfasst, die durch Permutation der Indices gebildet werden können. Jedes (alphabetisch geordnete) Glied ist