Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 19. Determinanten.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

n Elemente bilden lassen, wobei aber blosse Verstellung der Glieder keine neue Kombination ergiebt.

Die Kombinationen der vier Elemente a, b, c, d zur zweiten Klasse sind:
ohne Wiederholung: ab, ac, ad, bc, bd, cd;
mit " aa, ab, ac, ad; bb, bc, bd; cc, cd; dd.

9. Die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur rten Klasse ist

$$K_r(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Aus den Kombinationen ergeben sich die Variationen, wenn man die Elemente der einzelnen Kombinationen permutiert.

10. Die Anzahl der Kombinationen aus n Elementen zur rten Klasse mit Wiederholung ist

$$K'_r(n) = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots..(n+r-1)}{r!} = \binom{n+r-1}{r}.$$

§ 19. Determinanten.

1. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Unter der Determinante eines Systems von n^2 Elementen $a_1, a_2, \ldots. a_n$, $b_1, b_2, \ldots. b_n$, ... versteht man die Summe $\Sigma(\pm a_1 b_2 c_3 \ldots)$, in welcher jedes Glied alle Buchstaben und Indices ohne Wiederholung enthält und welche zugleich alle möglichen Produkte umfasst, die durch Permutation der Indices gebildet werden können. Jedes (alphabetisch geordnete) Glied ist positiv oder negativ zu setzen, je nachdem die Anzahl der Nichtfolgen der Indices gerade oder ungerade ist.

2. Der Wert einer Determinante wird nicht geändert, wenn die Vertikal- als Horizontalreihen und umgekehrt geschrieben werden. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

3. Werden irgend zwei Horizontal- oder zwei Vertikalreihen mit einander vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

4. Sind in einer Determinante zwei Horizontal- oder zwei Vertikalreihen völlig übereinstimmend, so ist der Wert der Determinante gleich Null.

5. Bezeichnet man in einer Determinante Δ den Faktor von a_r mit A_r (Unterdeterminante), den von b_r mit B_r, dann ist

$$\begin{aligned} \Delta &= a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots\ldots + a_n A_n \\ &= b_1 B_1 + b_2 B_2 + \ldots\ldots + b_n B_n \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \text{ ferner ist} \end{aligned}$$

$$b_1 A_1 + b_2 A_2 + \ldots + b_n A_n = c_1 A_1 + c_2 A_2 + \ldots + c_n A_n = 0.$$

6. Wenn alle Elemente einer Horizontal- oder einer Vertikalreihe mit demselben Faktor multipliziert sind, so ist die Determinante mit diesem Faktor multipliziert. Z. B.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Sind alle Elemente einer Reihe 0, so ist die ganze Determinante gleich Null.

7. Wenn jedes Element einer Reihe eine Summe zweier Grössen ist, so ist die Determinante in die Summe zweier Determinanten zerlegbar; z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

oder: $(a_1+\alpha_1)A_1+(a_2+\alpha_2)A_2+(a_3+\alpha_3)A_3=a_1A_1+a_2A_2$
$+a_3A_3+\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\alpha_3A_3.$

Bestehen die Glieder einer Reihe aus m, die einer andern aus n und die einer dritten aus p Summanden, so ist die Determinante in m. n. p Determinanten zerlegbar.

8. Der Wert einer Determinante bleibt unverändert, wenn man zu den Elementen einer Reihe beliebige, gleich vielfache der entsprechenden Elemente einer andern Reihe addiert; z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+ka_1 \\ a_2 & b_2 & c_2+ka_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+ka_3 \end{vmatrix}$$

9. Wenn

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ und } \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \text{ dann ist}$$

$$D\,.\,\Delta = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

10. Wenn alle diejenigen Elemente einer Determinante verschwinden, welche m Vertikal- mit n — m Horizontalreihen gemeinschaftlich haben, so lässt sich dieselbe in das Produkt zweier Determinanten zerlegen; z. B.:

$$\left|\begin{array}{cc:ccc} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ \hdashline 0 & 0 & c_3 & d_3 & e_3 \\ 0 & 0 & c_4 & d_4 & e_4 \\ 0 & 0 & c_5 & d_5 & e_5 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{ccc} c_3 & d_3 & e_3 \\ c_4 & d_4 & e_4 \\ c_5 & d_5 & e_5 \end{array}\right|$$

11. Jede Determinante kann auf folgende Weise erweitert werden:

$$\left|\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccccc} 1 & \beta_4 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 \end{array}\right|$$

§ 20. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1. Ist für ein Ereignis die Anzahl aller möglichen Fälle m, die der günstigen Fälle (Treffer) t, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen:

$$w = \frac{t}{m},$$

für das Nichteintreffen

$$u = \frac{m - t}{m} = 1 - w, \text{ also}$$

$$\text{I. } w + u = 1.$$

2. Ist bei m möglichen Fällen $w_1 = \frac{t_1}{m}$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses E_1 und $w_2 = \frac{t_2}{m}$ diejenige für das Eintreffen von E_2, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass entweder E_1 oder E_2 eintrifft:

$$\text{II. } W = w_1 + w_2.$$