



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

I. Geometrie der Ebene.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-78595](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-78595)

Analytische Geometrie.

I. Geometrie der Ebene.

§ 69. Aenderung des Koordinatensystemes.

x, y Koordinaten, OX, OY Axen des ursprünglichen Systems, x', y' Koordinaten, OX', OY' Axen des neuen Systems, a, b Koordinaten des neuen Ursprungs.

1. Parallele Verschiebung der Axen:

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \end{cases}$$

2. Drehung eines rechtwinkligen Systems um den Ursprung um den Winkel φ :

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \end{cases}$$

3. Verschiebung und Drehung jeder Axe (Aenderung des Winkels zwischen den Axen):

$$\begin{cases} x = a + \frac{x' \sin (X'Y) + y' \sin (Y'Y)}{\sin (XY)} \\ y = b + \frac{x' \sin (X'X) + y' \sin (Y'X)}{\sin (YX)}. \end{cases}$$

§ 70. Allgemeine Sätze.

1. Der Grad einer Gleichung wird durch Verwandlung des Koordinaten-Systems nicht geändert.

2. Die Bedingung dafür, dass der Punkt mit den Koordinaten x_1, y_1 auf der Linie liegt, deren Gleichung $F(x, y) = 0$, ist $F(x_1, y_1) = 0$.

3. Die aus den beiden Gleichungen $F(x, y) = 0$ und $f(x, y) = 0$ sich ergebenden Werte von x und y sind die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden durch jene Gleichungen dargestellten Linien.

Setzt man in $F(x, y) = 0$ für y den Wert null, so ergeben sich aus der erhaltenen Gleichung die Abscissen der Schnittpunkte der betreffenden Linie mit der X -axe; aus $x = 0$ ergeben sich die Ordinaten der Schnittpunkte mit der Y -axe.

4. Ist λ ein Zahlenfaktor, so stellt

$$F(x, y) + \lambda f(x, y) = 0$$

die Gleichung einer Linie dar, welche durch die Schnittpunkte der durch $F(x, y) = 0$ und $f(x, y) = 0$ dargestellten Linien geht.

Linie erster Ordnung, gerade Linie.

§ 71. Gleichungsformen. Lagebeziehungen.

Es seien a und b die Abschnitte der Geraden auf den Axen (Koordinaten der Schnittpunkte mit den Axen), φ der Winkel der Geraden mit der $+X$ -axe, p die Länge des Lotes vom Ursprung auf die Gerade, α der Winkel, den p mit der $+X$ -axe bildet.

1. Gleichung der Geraden:*)

erste allgem. Form $Ax + By + C = 0,$

zweite " " $y = mx + b$

dritte " " $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$

vierte " " $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ (Normalform.)

*) Wenn sich eine der Gleichungen oder Formeln auf ein schiefwinkliges System beziehen soll, ist dies besonders bemerkt.

Symbolische Abkürzung der Gleichung
für die allgemeine Form $L=0$,

„ „ Normalform $l=0$.

$$\text{Axenabschnitte: } a = -\frac{C}{A} = -\frac{b}{m}$$

$$b = -\frac{C}{B}$$

Winkel mit der Xaxe bestimmt durch

$$\text{tg } \varphi = -\frac{A}{B} = m = -\frac{b}{a} = -\text{ctg } \alpha$$

2. Besondere Fälle:

$$\left\{ \begin{array}{l} x=a \text{ Gleichg. einer Geraden } \parallel \text{ zur Yaxe} \\ y=b \text{ „ „ „ „ } \parallel \text{ „ X „} \\ Ax + By = 0 \text{ „ „ „ durch den Ur-} \\ y = mx \text{ „ „ „ sprung} \\ y=0 \text{ „ der Xaxe} \\ x=0 \text{ „ „ Y „} \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y + C = 0 \text{ „ „ } \infty \text{ fernen Geraden.} \end{array} \right.$$

3. Gerade durch Punkt (x_1, y_1)

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0, \text{ oder}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1), \text{ oder}$$

$$(x - x_1) \cos \alpha + (y - y_1) \sin \alpha = 0$$

(durch ein veränderliches m , bzw. α erhält man ein Strahlenbüschel.)

4. Gerade durch zwei Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \text{ oder } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{oder } (y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y = x_1 y_2 - x_2 y_1, \text{ oder}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{(Zugleich Bedingung da-} \\ \text{für, dass 3 Punkte in ger.} \\ \text{Linie liegen.)}$$

Gerade durch den Ursprung und Punkt (x_1, y_1)

$$x_1 y - y_1 x = 0$$

5. Zwei parallele Gerade

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \text{ oder } \begin{cases} y = mx + b \\ y = mx + b_1, \text{ oder} \end{cases} \\ Ax + By + C_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha - p_1 = 0 \end{cases}$$

Zwei gerade Linien $Ax + By + C = 0$ und $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ sind parallel, wenn $AB_1 - A_1B = 0$

6. Gerade durch Punkt (x_1, y_1) parallel zu einer gegebenen Geraden.

Gegebene Gleichung:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{oder} \quad y = mx + b$$

gesuchte Gleichung:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \quad \text{„} \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

7. Zwei senkrechte Gerade:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \text{ oder } \begin{cases} y = mx + b \\ y = -\frac{1}{m}x + b_1. \end{cases} \\ Bx - Ay + C_1 = 0 \quad \text{„} \end{cases}$$

Die Geraden

$$Ax + By + C = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{oder} \\ \text{u. } A_1x + B_1y + C_1 = 0 \end{array} \right. \quad \begin{cases} y = mx + b \text{ u.} \\ y = m_1x + b_1 \end{cases}$$

sind senkrecht, wenn

$$AA_1 + BB_1 = 0 \quad \text{oder} \quad mm_1 + 1 = 0$$

Gleichung einer Geraden, welche durch Punkt (x_1, y_1) geht und senkrecht zu der Geraden $Ax + By + C = 0$ ist:

$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$$

8. Drei Gerade $Ax + By + C = 0$, $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ gehen durch einen Punkt, oder eine Gerade geht durch den Schnittpunkt der beiden andern, wenn

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. wenn

$A(B_1 C_2 - B_2 C_1) + B(C_1 A_2 - C_2 A_1) + C(A_1 B_2 - A_2 B_1) = 0$
 oder wenn die Zahlfactoren $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ sich so bestimmen lassen, dass

$$\lambda(Ax + By + C) + \lambda_1(A_1 x + B_1 y + C_1) + \lambda_2(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0.$$

§ 72. Grössenbestimmungen und -Beziehungen.

1. Koordinaten (x, y) des Teilpunktes einer Strecke, Endpunkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$:
 für den Halbierungspunkt

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

Teilung im Verhältnis $m:n$

$$x = \frac{m x_2 \pm n x_1}{m \pm n}, \quad y = \frac{m y_2 \pm n y_1}{m \pm n}$$

Das Zeichen $+$ gilt für den inneren, $-$ für den äusseren Teilpunkt.

2. Beziehungen zwischen den Koordinaten von 4 harmonischen Punkten $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$

$$2(x_1 x_2 + \xi_1 \xi_2) = (x_1 + x_2)(\xi_1 + \xi_2)$$

$$2(y_1 y_2 + \eta_1 \eta_2) = (y_1 + y_2)(\eta_1 + \eta_2)$$

3. Vier durch den Ursprung gehende Gerade

$$y = m_1 x \quad y = n_1 x$$

$$y = m_2 x \quad y = n_2 x$$

bilden ein harmonisches Büschel, wenn

$$2(m_1 m_2 + n_1 n_2) = (m_1 + m_2)(n_1 + n_2).$$

4. Entfernung e zweier Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$

$$e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Im schiefwinkligen System mit Achsenwinkel ω

$$e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega}.$$

5. Gerade durch Punkt (x_1, y_1) , welche mit der Xaxe den $\sphericalangle \varphi$ bildet:

$$y - y_1 = (x - x_1) \operatorname{tg} \varphi$$

6. Winkel φ zwischen zwei Geraden bestimmt durch

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \frac{A B_1 - A_1 B}{A A_1 + B B_1} = \pm \frac{m_1 - m}{m m_1 + 1} \quad (\text{vgl. § 715 und 7})$$

7. Gerade, welche mit $y = mx + b$ den $\sphericalangle \varphi$ bildet und durch Punkt (x_1, y_1) geht

$$y - y_1 = \frac{m + \operatorname{tg} \varphi}{1 - m \operatorname{tg} \varphi} (x - x_1)$$

8. Abstand p des Ursprungs von der Geraden $Ax + By + C = 0$, oder $y = mx + b$

$$p = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{b}{\pm \sqrt{m^2 + 1}};$$

das Zeichen wird so gewählt, dass p positiv wird.

9. Abstand e des Punktes (x_1, y_1) von der Geraden $Ax + By + C = 0$, oder $y = mx + b$, oder $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$

$$e = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{y_1 - mx_1 - b}{\pm \sqrt{m^2 + 1}} \\ = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p.$$

Das Vorzeichen der Wurzel wird so gewählt, dass für einen Punkt, der mit dem Ursprung auf derselben Seite der Geraden liegt, e positiv wird.

10. Entfernung e zweier paralleler Geraden (s. § 715)

$$e = \frac{C - C_1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{C - C_1}{\pm \sqrt{m^2 + 1}} = p - p_1.$$

11. Halbierungslinie des Winkels zweier Geraden

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \quad \text{oder}$$

$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = \pm (x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1)$.
Sind die Geraden gegeben durch die symbolischen

Gleichungen $l = 0$, $l_1 = 0$ dann ist die Gleichung der Winkelhalbierenden

$$l \mp l_1 = 0.$$

12. Inhalt J eines Dreiecks, aus den Ecken (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3)

$$\pm J = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)).$$

Liegen die drei Punkte in gerader Linie, so ist $J = 0$, vergl. § 71 4. Fällt (x_3, y_3) in den Ursprung, so ist

$$\pm J = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

13. Inhalt J eines Dreiecks aus den Gleichungen der drei Seiten (Bez. s. § 19₁)

$$\pm 2 J = \frac{(\Sigma \pm A B_1 C_2)^2}{(A B_1 - A_1 B)(A_1 B_2 - A_2 B_1)(A_2 B - A B_2)}$$

Gehen die Geraden durch einen Punkt, so ist $2 J = 0$, vergl. § 71 8, sind irgend zwei parallel, so ist $2 J = \infty$, vergl. § 71 5.

14. Inhalt eines Vielecks aus den Koordinaten der Ecken

$$\pm 2 J = x_1 (y_2 - y_n) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_4 - y_2) + \dots + x_n (y_1 - y_{n-1}).$$

§ 73. Polargleichung der Geraden.

r Fahrstrahl, φ Azimut, p Lot vom Pol auf die Gerade, α Winkel zwischen p und der Polaraxe.

1. Lot zur Polaraxe:

$$r \cos \varphi = c$$

2) Parallele zur Polaraxe:

$$r \sin \varphi = c.$$

3. Gleichung der Geraden:

$$r \cos (\varphi - \alpha) = p$$

4. Zwei parallele Gerade

$$\begin{cases} r \cos(\varphi - \alpha) = p \\ r \cos(\varphi - \alpha) = p_1. \end{cases}$$

5. Zwei Gerade sind senkrecht, wenn

$$\alpha_1 - \alpha = R.$$

6. Entfernung e zweier Punkte $(\varphi_1, r_1), (\varphi_2, r_2)$

$$e = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

7. Inhalt des Dreiecks CP_1P_2

$$J = \pm \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1).$$

8. Inhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$

$$J = \pm \frac{1}{2} \left\{ r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + r_2 r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + r_3 r_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \right\}.$$

9. Bedingung dafür, dass drei Punkte in gerader Linie liegen

$$r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + r_2 r_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) + r_3 r_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) = 0.$$

10. Gleichung der Verbindungslinie der beiden Punkte

$(\varphi_1, r_1), (\varphi_2, r_2)$

$$r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + r_2 r \sin(\varphi - \varphi_2) + r r_1 \sin(\varphi_1 - \varphi) = 0.$$

§ 74. Strahlbüschel, Doppelverhältnis, projektivische Strahlbüschel.

(Abgekürzte Bezeichnung der Gleichung der Geraden.)

1. Strahlbüschel. Sind $l_1 = 0, l_2 = 0$ die Gleichungen zweier Geraden in Normalform, so ist die allgemeine Gleichung einer dritten Geraden (Teilstrahl), die durch den Schnittpunkt der beiden ersten geht,

$$l_1 - \lambda l_2 = 0.$$

λ ist das Verhältnis der von irgend einem Punkt des Teilstrahls l_3 auf l_1 und l_2 gefällten Lote (Sinusteilverhältnis)

$$\lambda = \frac{\sin(l_1 l_3)}{\sin(l_3 l_2)}$$

Ist der Zahlenfaktor λ veränderlich, so ist durch die Gleichung ein Strahlbüschel dargestellt.

Sind die ersten Geraden durch ihre allgemeine Gleichung $L_1 = 0, L_2 = 0$ gegeben, so ist die Gleichung des Teilstrahls

$$L_1 - \lambda L_2 = 0.$$

λ unterscheidet sich von dem Verhältnis der Abstände durch einen konstanten Faktor.

2. Vier sich in einem Punkt schneidende Geraden können dargestellt werden durch die Gleichungen

$$\begin{cases} l_1 = 0 & l_1 - \lambda_1 l_2 = 0 \\ l_2 = 0 & l_1 - \lambda_2 l_2 = 0 \end{cases}$$

das Doppelverhältnis (anharmonisches Verhältnis) (a, b, c, d) der vier Strahlen a, b, c, d ist

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = (a, b, c, d) = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}$$

Satz: Wenn vier von einem Punkt ausgehende Strahlen a, b, c, d von einer beliebigen Geraden in den Punkten A, B, C, D geschnitten werden, so ist das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte konstant und gleich dem Doppelverhältnis des Büschels d. h.

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}$$

Für einen gegebenen Wert des Doppelverhältnisses ist zu drei Strahlen der vierte eindeutig bestimmt.

Das Doppelverhältnis des Büschels

$$\begin{cases} l_1 - \lambda_1 l_2 = 0 \\ l_1 - \lambda_2 l_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_1 - \lambda_3 l_2 = 0 \\ l_1 - \lambda_4 l_2 = 0 \end{cases} \text{ ist} \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}$$

3. Harmonisches Büschel. Ist das Doppelverhältnis der vier Strahlen $= -1$, so ist das Büschel ein harmonisches; es ist dargestellt durch

$$\begin{cases} l_1 = 0 \\ l_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_1 - \lambda_1 l_2 = 0 \\ l_1 + \lambda_1 l_2 = 0 \end{cases}.$$

Die Beziehungen in Nr. 2 und 3 gelten auch, wenn die Geraden durch Gleichungen von der Form $L_1 - \lambda_1 L_2 = 0$ u. s. w. gegeben sind.

4. Projektivische Strahlbüschel. Sind

$$\begin{aligned} L_1 - \lambda_1 L_2 = 0, & \quad L_1 - \lambda_2 L_2 = 0 \text{ u. s. f.} \\ M_1 - \lambda_1 M_2 = 0, & \quad M_1 - \lambda_2 M_2 = 0 \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

die Gleichungen der Strahlen zweier Büschel, so ist das Doppelverhältnis von vier Strahlen des einen Büschels gleich dem Doppelverhältnis der entsprechenden Strahlen des andern; solche Büschel heissen projektivisch.

Durch drei Paare entsprechender Strahlen sind die Büschel vollständig und eindeutig bestimmt.

§ 75. Homogene Gleichung der Geraden, trimetrische Punkt-Koordinaten.

Sind $l_1 = 0, l_2 = 0, l_3 = 0$ die Gleichungen dreier nicht durch einen Punkt gehenden Geraden, so kann die Gleichung jeder andern Geraden in die Form gebracht werden

$$\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \lambda_3 l_3 = 0.$$

Hiebei können l_1, l_2, l_3 auch aufgefasst werden als Grössen, die den Abständen eines Punktes der Geraden von den Seiten des Dreiecks, das von l_1, l_2, l_3 gebildet wird, proportional sind (Dreieckskoordinaten). Jeder Abstand ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem er gleich oder gegenläufig ist zu dem von einem Punkt im Innern des Dreiecks auf dieselbe Seite gefällten Lot.

§ 76. Linienkoordinaten; Gleichung des Punktes; Punktreihe; projektivische Punktreihen und Strahlbüschel.

1. Ist die Gleichung irgend einer Geraden

$$u x + v y + 1 = 0,$$

so ist die Lage der Geraden durch die Konstanten u und v gegeben; sie heissen daher die Koordinaten jener geraden Linie oder Linienkoordinaten. u und v sind die negativen reziproken Abschnitte, welche die Gerade auf den Koordinatenachsen macht.

2. Alle Geraden, deren Koordinaten einer Gleichung

$$(1) A u + B v + C = 0$$

genügen, gehen durch einen Punkt, dessen Koordinaten $x = \frac{A}{C}$ und $y = \frac{B}{C}$ sind; die Gleichung (1) heisst allgemeine Gleichung des Punktes. Die Gleichung

$$(2) a u + b v + 1 = 0$$

heisst die Normalform der Gleichung des Punktes.

3. Eine Gleichung n ten Grades in u und v stellt eine von Geraden eingehüllte Kurve dar; bestimmt man aus dieser Gleichung und der Gleichung eines Punktes die gemeinschaftlichen Werte von u und v , so ergeben sich aus denselben n Tangenten an die Kurve; diese heisst eine Linie n ter Klasse. Die Ordnungszahl giebt die Zahl der Schnittpunkte der Kurve mit einer Geraden an, die Klassenzahl die Anzahl der Tangenten der Kurve, die durch einen bestimmten Punkt gehen.

4. Sind $\mathcal{Z} = 0$ und $\mathcal{Z}_1 = 0$ die Gleichungen zweier Umhüllungslinien, so stellt $\mathcal{Z} + \lambda \mathcal{Z}_1 = 0$ eine Umhüllungslinie dar, welche alle gemeinschaftlichen Tangenten von $\mathcal{Z} = 0$ und $\mathcal{Z}_1 = 0$ berührt (vgl. § 70₄).

5. Sind $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ die Gleichungen zweier Punkte P_1 und P_2 , so ist

$$U_1 - \lambda U_2 = 0$$

die Gleichung eines Punktes auf der Verbindungslinie von P_1 und P_2 ; ist λ veränderlich, so hat man die Gleichung einer Punktreihe.

6. Doppelverhältnis. Sind

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} U_1 - \lambda_1 U_2 = 0 \\ U_1 - \lambda_2 U_2 = 0 \end{cases}$$

vier Punkte auf einer Geraden, so ist das Doppelverhältnis derselben ausgedrückt durch $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

7. Harmonische Punkte. Wenn $\lambda_1 : \lambda_2 = -1$, so sind die vier Punkte (von Nr. 6) harmonische Punkte; sie sind also dargestellt durch

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} U_1 - \lambda U_2 = 0 \\ U_1 + \lambda U_2 = 0 \end{cases}$$

8. Projektivische Punktreihen. Zwei Punktreihen $U_1 - \lambda U_2 = 0$ und $V_1 - \lambda V_2 = 0$ sind projektivisch.

Eine Punktreihe $U_1 - \lambda U_2 = 0$ und ein Strahlbüschel $L_1 - \lambda L_2 = 0$ sind projektivisch.

§ 77. Homogene Gleichung des Punktes, trimetrische Linienkoordinaten.

Sind $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ die Gleichungen dreier nicht auf einer Geraden liegenden festen Punkte, so kann die Gleichung jedes anderen Punktes in die Form gebracht werden

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0.$$

Linien zweiter Ordnung (Kegelschnitte).

A. Der Kreis.

§ 78. Kurvengleichung; Sekante, Tangente, Polare etc. Koordinaten des Mittelpunktes (a, b) , Halbmesser r .

1. Allgemeine Gleichung des Kreises

$$(1) \ x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

$$2. \quad (2) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$a = -\frac{A}{2}, \quad b = -\frac{B}{2}, \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C}.$$

Ist $A^2 = 4C$, oder $B^2 = 4C$, dann berührt der Kreis die X-, bzw. die Yaxe, ist $C = 0$, so geht der Kreis durch den Ursprung. — Für die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Axen ist $x_1 + x_2 = 2a$, $y_1 + y_2 = 2b$.

3. Der Ursprung ist Mittelpunkt:

$$(3) \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad (\text{Mittelpunktsgleichung}).$$

4. Mittelpunkt auf der Xaxe im Abstand r vom Ursprung:

$$y^2 = 2rx - x^2 \quad (\text{Scheitelgleichung}).$$

5. Gleichung für ein schiefwinkliges System:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + 2(x - a)(y - b) \cos \omega = r^2.$$

6. Sekante durch die Punkte (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , Mittelpunkt im Ursprung:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \quad \text{oder} \quad y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} (x - x_1).$$

7. Tangente, Berührungspunkt (x_1, y_1) , Mittelpunkt $(0, 0)$:

$$(1) \quad x x_1 + y y_1 = r^2,$$

Mittelpunkt (a, b) :

$$(2) \quad (x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2.$$

Bezeichnet man den Winkel, den der Halbmesser zum Berührungspunkt mit der Xaxe macht mit α , so gehen die vorstehenden Gleichungen (1) und (2) über in

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = r$$

$$(x - a) \cos \alpha + (y - b) \sin \alpha = r.$$

Die Gerade $y = mx + b$ ist Tangente an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$, wenn

$$m = -\frac{x_1}{y_1}, \quad b = \frac{r^2}{y_1}.$$

Die Koordinaten des Berührungspunktes

(x_1, y_1) einer von dem Punkt (x', y') ausserhalb des Kreises gezogenen Tangente ergeben sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x' x_1 + y' y_1 &= r^2 \\ x_1^2 + y_1^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Die Gleichung dieser Tangente (zwei Lagen) ist

$$y - y' = \frac{-x' y' \pm r \sqrt{x'^2 + y'^2 - r^2}}{r^2 - x'^2} (x - x').$$

8. Polare (s. § 49) des Punktes (x_1, y_1) in Beziehung auf den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$

$$x x_1 + y y_1 = r^2.$$

Die Koordinaten des Pols der Geraden $Ax + By + C = 0$ sind

$$x_1 = -\frac{Ar^2}{C}, \quad y_1 = -\frac{Br^2}{C}.$$

9. Kreis durch drei Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$; er ist bestimmt durch die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} (x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2 \\ (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 &= r^2 \\ (x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 &= r^2 \\ (x_3 - a)^2 + (y_3 - b)^2 &= r^2, \end{aligned}$$

seine Gleichung ist daher

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad \begin{array}{l} \text{(Zugleich Bedingung da-} \\ \text{für, dass vier Punkte auf} \\ \text{einem Kreis liegen.)} \end{array}$$

10. Zwei Kreise

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$x^2 + y^2 + A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

sind konzentrisch, wenn $A = A_1, B = B_1$.

11. Potenzlinie (s. § 51) zweier Kreise (s. Nr. 10):

$$(A - A_1)x + (B - B_1)y + C - C_1 = 0$$

(Differenz der Kreisgleichungen, vgl. § 51₃ und § 70₄).

§ 79. Polarkoordinaten.

Ist O der Pol (Anfangspunkt), M der Mittelpunkt, OX die Polaraxe, \sphericalangle MOX = α , \sphericalangle POX = φ , OP = ρ , OM = d, so ist

1. die Gleichung des Kreises

$$(\rho \cos \varphi - d \cos \alpha)^2 + (\rho \sin \varphi - d \sin \alpha)^2 = r^2 \text{ oder} \\ \rho^2 - 2 \rho d \cos(\varphi - \alpha) + d^2 = r^2.$$

Fällt OM mit OX zusammen (Mittelpunkt auf der Polaraxe), so ist die Gleichung des Kreises

$$\rho^2 - 2 \rho d \cos \varphi + d^2 = r^2.$$

Liegt ausserdem O auf dem Kreis, so ist

$$\rho = 2 r \cos \varphi.$$

2. Hat der Leitstrahl für seine Schnittpunkte mit dem Kreis die Längen ρ_1 und ρ_2 , so ist

$$d \cos(\varphi - \alpha) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}.$$

3. Für den berührenden Leitstrahl ist

$$d \sin(\varphi - \alpha) = r.$$

B. Parabel, Ellipse, Hyperbel.

§ 80. Kurvengleichungen; Sekante, Tangente, Polare etc.

1. Stücke und Bezeichnungen.

Grosse Axe 2 a }
kleine „ 2 b } bei Ellipse und Hyperbel

Parameter 2 p (= Sehne durch einen Brennpunkt parallel zu der Leitlinie); für Ellipse und Hyperbel ist

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Lineare Exzentrizität (Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt) ist bei der

$$\text{Ellipse } f = \sqrt{a^2 - b^2};$$

Hyperbel $f = \sqrt{a^2 + b^2}$;

Parabel: Abstand des Brennpunktes vom Scheitel $\frac{p}{2}$;

Numerische Exzentrizität $\varepsilon = \frac{f}{a}$.

ε giebt zugleich das Verhältniß der Entfernung eines Kurvenpunktes vom Brennpunkt und seines Abstandes von der zugehörigen Leitlinie an. Es ist für die

Ellipse $\varepsilon < 1$,

Parabel $\varepsilon = 1$,

Hyperbel $\varepsilon > 1$.

Ferner ist $p = a(1 - \varepsilon^2)$; $b^2 = a \cdot p$; $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$

Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie $= \frac{p}{\varepsilon}$.

2. Scheitelgleichung. Erste Form

$$\text{I. } y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2$$

(gemeinschaftliche Gleichung).

Diese Gleichung stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem $\varepsilon \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 1$. $\varepsilon = 0$ giebt die Scheitelgleichung eines Kreises.

Zweite Form:

$$\text{II. } \begin{cases} y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 & (\text{Ellipse}) \\ y^2 = 2px & (\text{Parabel}) \\ y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 & (\text{Hyperbel}). \end{cases}$$

3. Mittelpunktsleichung:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 & (\text{Ellipse}) \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 & (\text{Hyperbel}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 & (\text{Hyperbel}) \\ x^2 - y^2 = a^2 & (\text{Gleichseitige Hyperbel}). \end{cases}$$

4. Polargleichung.

1. Der Brennpunkt ist Pol, die Axe bezw. grosse Axe ist Polaraxe, φ ist von dem Scheitel aus gezählt, der dem Pol am nächsten liegt.

$$e = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Die Kurve ist eine Ellipse, Parabel, Hyperbel je nachdem $\varepsilon \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 1$. Für die Parabel ist insbesondere

$$e = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

2. Der Mittelpunkt ist Pol, die grosse Axe Polaraxe

$$e^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \text{ (Ellipse);}$$

$$e^2 = \frac{-b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \text{ (Hyperbel).}$$

Die folgenden Gleichungen sind bei der Parabel auf die Scheitel-, bei Ellipse und Hyperbel auf die Mittelpunktsgleichung zu beziehen.

5. Sekante durch die beiden Punkte (x_1, y_1) , (x_2, y_2) der

1. Parabel:

$$(y_1 + y_2)y - y_1 y_2 = 2px \text{ oder}$$

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_2 + y_1} (x - x_1).$$

2. Ellipse:

$$\frac{(x_1 + x_2)x}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2)y}{b^2} = \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + 1, \text{ oder}$$

$$y - y_1 = -\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)} (x - x_1).$$

3. Hyperbel:

$$\frac{(x_1 + x_2)x}{a^2} - \frac{(y_1 + y_2)y}{b^2} = \frac{x_1 x_2}{a^2} - \frac{y_1 y_2}{b^2} + 1, \text{ oder}$$

$$y - y_1 = \frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}(x - x_1).$$

6. Tangente im Punkt (x_1, y_1) der

1. Parabel: $yy_1 = p(x + x_1).$

2. Ellipse: $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1, \text{ oder}$

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1).$$

3. Hyperbel: $\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1, \text{ oder}$

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1).$$

7. Asymptoten der Hyperbel

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0.$$

Ist der Asymptotenwinkel 2φ , so ist $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}.$

Bei der gleichseitigen Hyperbel stehen die Asymptoten auf einander senkrecht.

Ein Durchmesser $y = mx$ schneidet, berührt im unendlich fernen Punkt (ist also Asymptote), trifft die

Hyperbel nicht, je nachdem $m^2 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \frac{b^2}{a^2}.$

8. Normale im Punkt (x_1, y_1) der

1. Parabel: $p(y - y_1) + y_1(x - x_1) = 0, \text{ oder}$
 $xy_1 + py = y_1(x_1 + p).$

2. Ellipse: $\frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 - b^2, \text{ oder}$

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

$$3. \text{ Hyperbel: } \frac{a^2 x}{x_1} + \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 + b^2, \text{ oder}$$

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1).$$

9. Bezeichnet man die Abscisse des Schnittpunktes der Tangente im Punkt (x_1, y_1) mit der Xaxe mit x_0 , die Subtangente (Projektion des Tangentenstückes zwischen Berührungspunkt und Xaxe auf die Xaxe) mit ST, die Subnormale mit SN, so ist

	x_0	ST	SN
1. für die Parabel:	$-\frac{x_1}{a^2}$	$\frac{2x_1}{a^2 - x_1^2}$	$\frac{p}{b^2 x_1}$
2. " " Ellipse	$\frac{x_1}{a^2}$	$\frac{x_1}{x_1^2 - a^2}$	$-\frac{b^2 x_1}{a^2}$
3. " " Hyperbel	$\frac{x_1}{a^2}$	$\frac{x_1^2 - a^2}{x_1}$	$\frac{b^2 x_1}{a^2}$

Aus dem Wert von x_0 ergibt sich für jede Kurve eine Konstruktion der Tangente im Punkte (x_1, y_1) .

10. Tangente vom Punkt (x_1, y_1) ausserhalb der

1. Parabel:

$$y - y_1 = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2px_1}}{2x_1} (x - x_1).$$

2. Ellipse:

$$y - y_1 = \frac{x_1 y_1 \pm \sqrt{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - a^2 b^2}}{x_1^2 - a^2} (x - x_1).$$

3. Hyperbel:

$$y - y_1 = \frac{x_1 y_1 \pm \sqrt{a^2 b^2 - (b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2)}}{x_1^2 - a^2} (x - x_1).$$

11. Allgemeine Gleichung der Tangente (Richtung gegeben) für die

1. Parabel: $y - mx = \frac{p}{2m}$.

2. Ellipse: $y - mx = \pm \sqrt{m^2 a^2 + b^2}$.

3. Hyperbel: $y - mx = \pm \sqrt{m^2 a^2 - b^2}$.

12. Polare des Punktes (x_1, y_1) in Beziehung auf die

1. Parabel: $yy_1 = p(x + x_1)$.

2. Ellipse: $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

3. Hyperbel: $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

Liegt Punkt (x_1, y_1) auf der Kurve, so ist seine Polare zugleich Tangente. Die Polare des Mittelpunkts ist die unendlich ferne Gerade; die Polare eines unendlich fernen Punktes ist ein Durchmesser.

13. Koordinaten des Pols der Geraden $Ax + By + C = 0$, für die

1. Parabel: $x_1 = +\frac{C}{A}, y_1 = -\frac{Bp}{A}$.

2. Ellipse: $x_1 = -\frac{a^2A}{C}, y_1 = -\frac{b^2B}{C}$.

3. Hyperbel: $x_1 = -\frac{a^2A}{C}, y_1 = \frac{b^2B}{C}$.

14. Zwei Geraden heißen konjugiert in Bezug auf einen Kegelschnitt, wenn jede durch den Pol der andern geht, die Koordinaten des Pols der einen müssen also die Gleichung der andern befriedigen.

1. Ist bei der Parabel ein unendlich ferner Punkt gegeben durch die Richtung $y = mx$, so ist der zugehörige Durchmesser

$$y = \frac{p}{m}.$$

2. Gleichungen für zwei konjugierte Durchmesser bei der

Ellipse: $Ax - By = 0$ und $\frac{Bx}{a^2} + \frac{Ay}{b^2} = 0$.

Hyperbel: $Ax + By = 0$ und $\frac{Bx}{a^2} + \frac{Ay}{b^2} = 0$.

Jede Asymptote der Hyperbel und ihr konjugierter Durchmesser fallen zusammen.

15. Gleichung in Beziehung auf zwei konjugierte Durchmesser $2a_1, 2b_1$

$$1. \text{ Ellipse: } \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1; \text{ Beziehung: } a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$$

$$2. \text{ Hyperbel: } \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1; \text{ „ } a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$$

Sind φ und φ_1 die Winkel, welche zwei konjugierte Durchmesser mit der Hauptaxe bilden, so ist für die

$$3. \text{ Ellipse: } \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{b^2}{a^2}; a_1 b_1 \sin(\varphi - \varphi_1) = ab \text{ (s. § 81}_{24}\text{)}$$

$$4. \text{ Hyperbel: } \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi_1 = +\frac{b^2}{a^2}; a_1 b_1 \sin(\varphi - \varphi_1) = ab \text{ (s. § 81}_{25}\text{)}$$

Gleichung der Hyperbel in Beziehung auf die beiden Asymptoten

$$x' y' = c^2 = \frac{f^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4};$$

$$\text{gleichseitige Hyperbel } x' y' = \frac{1}{2} a^2$$

16. Leitlinie (Direktrix), d. h. Polare des Brennpunktes für die

$$1. \text{ Parabel: } x = -\frac{p}{2}; \text{ Brennpunkt } \left(\frac{p}{2}, 0\right)$$

$$2. \text{ Ellipse: } x = \frac{a^2}{f} = \frac{a}{\varepsilon}; \text{ f. d. Brennpunkt } (f, 0)$$

$$3. \text{ Hyperbel: } x = \frac{a^2}{f} = \frac{a}{\varepsilon}; \text{ „ „ „ } (f, 0)$$

17. Länge des Brennstrahls, bzw. der Brennstrahlen zu dem Punkt (x_1, y_1)

1. Parabel: $r = x_1 + \frac{p}{2}$

2. Ellipse: $r = a - x_1 \varepsilon$
 $r_1 = a + x_1 \varepsilon$; $r + r_1 = 2a$

3. Hyperbel: $r = x_1 \varepsilon - a$
 $r_1 = x_1 \varepsilon + a$; $r_1 - r = 2a$

18. Krümmungsmittelpunkt (x_0, y_0) und Krümmungshalbmesser ρ für den Punkt (x_1, y_1) der

1. Parabel:
$$\begin{cases} x_0 = 3x_1 + p = \frac{3y_1^2 + 2p^2}{2p} \\ y_0 = -\frac{y_1^3}{p^2} = -\frac{2x_1 y_1}{p} \end{cases}$$

$$\rho = \frac{(y_1^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{N_x^3}{p^2}; \text{ für den Scheitel } \rho = p.$$

2. Ellipse:
$$\begin{cases} x_0 = \frac{f^2 x_1^3}{a^4} = \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2} \\ y_0 = -\frac{f^2 y_1^3}{b^4} = -\frac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^4} \end{cases}$$

$$\rho = \frac{(b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{(rr_1)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{N_x^3}{p^2}$$

N_x Normale vom Punkt (x_1, y_1) bis zur Xaxe.
 Für den Scheitel der grossen Axe ist

$$\rho_2 = \frac{b^2}{a} = p, \text{ für den der kleinen}$$

$$\rho_1 = \frac{a_2}{b}$$

3. Hyperbel:
$$\begin{cases} x_0 = \frac{f^2 x_1^3}{a^4} = \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2} \\ y_0 = -\frac{f^2 y_1^3}{b^4} = -\frac{a^2 \varepsilon^2 y_1^3}{f^4} \end{cases}$$

$$e = \frac{(b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{(r r_1)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{N x^3}{p^2}$$

für den Scheitel ist

$$e = \frac{b^2}{a} = p$$

19. Flächeninhalt

1. Parabelsegment S,

Sehne senkrecht zur Axe, (x_1, y_1) Koordinaten des einen Endpunkts:

$$S = \frac{4}{3} x_1 y_1.$$

Beliebiges Segment; $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ Koordinaten der Endpunkte

$$S = \frac{(y_1 - y_2)^3}{12 p} = \frac{x_1 - x_2}{6} \cdot \frac{(y_1 - y_2)^2}{y_1 + y_2}$$

2. Ellipsenzone zwischen der kleinen Axe und der im Abstand x_1 dazu parallelen Sehne

$$\frac{b}{a} \left(x_1 \sqrt{a^2 - x_1^2} + a^2 \arcsin \frac{x_1}{a} \right)$$

Gesamte Ellipsenfläche: $ab\pi$.

3. Hyperbelsegment, Sehne senkrecht zur Xaxe:

$$S = x_1 y_1 - ab \ln \left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} \right)$$

20. Konfokale Kegelschnitte. — Eine Ellipse und eine Hyperbel, welche dieselben Brennpunkte haben, konfokal sind, haben folgende Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-\varepsilon^2)} = 1 \\ \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{a_1^2(\varepsilon_1^2-1)} = 1 \end{cases}$$

wobei $a\varepsilon = a_1\varepsilon_1 = f$, $\varepsilon < 1$, $\varepsilon_1 > 1$. Die Gleichungen können demnach in folgende Form gebracht werden:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{f^2 - a_1^2} = 1$$

Diese beiden konfokalen Kegelschnitte schneiden sich rechtwinklig (elliptische Koordinaten).

Die Gleichungen aller konfokalen Kegelschnitte sind in der Form enthalten

$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1;$$

sie stellt eine Ellipse, Hyperbel oder imaginäre Kurve dar, je nachdem $k < b^2 < a^2$, oder $b^2 < k < a^2$, oder $a^2 < k$.

§ 81. Sätze über Kegelschnitte.

A) Für jeden Kegelschnitt.

1. Die Polaren der sämtlichen Punkte einer Geraden gehen durch den Pol dieser Geraden, und die Pole sämtlicher Strahlen eines Büschels liegen auf der Polaren des Büschelmittelpunktes.

2. Die Halbierungspunkte paralleler Sehnen liegen auf einem Durchmesser.

3. Das Verhältnis der Entfernungen eines Punktes eines Kegelschnittes vom Brennpunkt und von der Leitlinie ist konstant und gleich der numerischen Exzentrizität ε . (Für die Ellipse ist $\varepsilon < 1$, für die Parabel $\varepsilon = 1$, für die Hyperbel $\varepsilon > 1$.)

4. Die Sehne, welche durch einen Brennpunkt geht und senkrecht zur grossen Axe ist, ist der Parameter.

5. Zieht man in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne Tangenten, so schneiden sich diese auf der Leitlinie, und die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit dem Brennpunkt steht senkrecht auf der Sehne.

6. Der Schnittpunkt zweier Tangenten liegt auf demjenigen Durchmesser, welcher der Sehne zwischen den Berührungspunkten konjugiert ist.

7. Sind in einer Ebene zwei Kurven zweiter Ordnung K und K_1 und bestimmt man zu jedem Punkt von K die Polare in Beziehung auf K_1 , so umhüllen diese Polaren eine dritte Kurve zweiter Ordnung.

8. Satz des Pascal: Bei jedem einem Kegelschnitt einbeschriebenen einfachen Sechseck schneiden sich die drei Paare Gegenseiten in drei Punkten einer Geraden. (Konstruktion eines Kegelschnittes aus 5 Punkten.)

9. Satz des Brianchon: Bei jedem einem Kegelschnitt umbeschriebenen Sechseck schneiden sich die drei Verbindungslinien von je zwei Gegenecken in einem Punkte. (Konstruktion eines Kegelschnittes aus 5 Tangenten.)

10. Der Krümmungshalbmesser im Scheitel der grossen Axe ist gleich dem halben Parameter.

B) Für die Parabel.

11. Die Durchmesser einer Parabel sind parallel zur Axe.

12. Der Fusspunkt des Lotes vom Brennpunkt auf eine Tangente liegt auf der Scheiteltangente. (Konstruktion der Parabel durch Umhüllung.)

13. Der Ort des Schnittpunkts zweier Parabeltangente, die senkrecht auf einander stehen, ist die Leitlinie.

14. Die Entfernung des Berührungspunktes einer Tangente vom Brennpunkt ist gleich der Entfernung des letzteren vom Schnittpunkt der Tangente mit der Axe. (Konstruktion der Tangente.)

15. Die Tangente halbiert den Winkel zwischen dem Brennstrahl und dem durch den Berührungspunkt

gehenden Durchmesser (Konstruktion der Tangente und Normale).

16. Die Parabel kann als Ellipse betrachtet werden, deren zweiter Brennpunkt in unendlicher Entfernung liegt.

C) Für Ellipse und Hyperbel.

17. Hat man ein System von Ellipsen, bezw. Hyperbeln, welche die Scheitel und die grosse Axe gemeinschaftlich haben, so schneiden sich alle Tangenten, welche die nämliche Abscisse für den Berührungspunkt haben, in einem und demselben Punkt der grossen Axe. (Konstruktion der Tangente.)

18. Alle Sehnen, welche einem Durchmesser parallel gezogen sind, werden von seinem konjugierten halbiert. Die Tangente im Endpunkt eines Durchmessers ist parallel zum konjugierten Durchmesser.

19. In jedem einem Kegelschnitt umbeschriebenen Parallelogramm sind die Diagonalen konjugierte Durchmesser; in jedem einem Kegelschnitt einbeschriebenen Parallelogramm sind die Seiten zwei konjugierten Durchmessern parallel.

20. Das Produkt der Entfernungen der Brennpunkte von einer Tangente ist unveränderlich ($= b^2$) und die Fusspunkte der Lote liegen auf einem Kreis, der die grosse Axe zum Durchmesser hat. (Konstruktion des Kegelschnitts durch Umhüllung.)

21. Die Tangente und die Normale in einem Punkt der Ellipse oder Hyperbel halbieren die Winkel, welche die Brennstrahlen nach diesem Punkt mit einander bilden. (Konstruktion der Tangente und der Normale.)

Hieraus folgt: Eine Ellipse und eine zu ihr konfokale Hyperbel schneiden sich unter rechten Winkeln.

22. Bei der Ellipse ist die Summe, bei der Hyperbel die Differenz der Brennstrahlen nach einem Punkt der

Kurve unveränderlich und zwar gleich der grossen Axe. (Faden-Konstruktion der Kurven.)

23. Auf jeder Sekante einer Hyperbel sind die beiden Abschnitte, welche zwischen der Kurve und ihren beiden Asymptoten liegen, einander gleich; der Abschnitt einer Tangente zwischen den Asymptoten wird durch den Berührungspunkt halbiert.

(Konstruktion der Hyperbel, wenn ein Punkt und die Asymptoten derselben gegeben sind.)

24. Der Inhalt eines Dreiecks, das zwischen zwei konjugierten Halbmessern einer Ellipse und der Verbindungslinie ihrer Endpunkte liegt, ist unveränderlich.

25. Der Inhalt eines Dreiecks, das von den Asymptoten und einer zwischen denselben liegenden Tangente einer Hyperbel eingeschlossen wird, ist unveränderlich.

26. Alle Parabeln sind einander ähnlich.

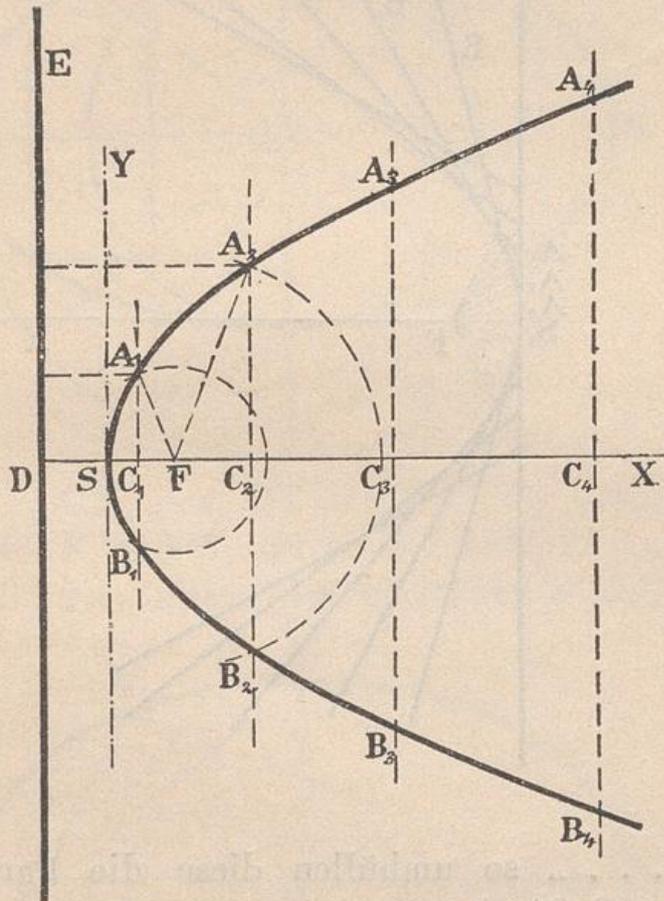
27. Zwei Ellipsen mit den Halbachsen (a, b) , (a_1, b_1) sind einander ähnlich, wenn $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$; ebenso sind zwei Hyperbeln einander ähnlich, wenn $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$, d. h., wenn sie gleiche Asymptotenwinkel haben.

§ 82. Konstruktion der Kegelschnitte.

1. Parabel.

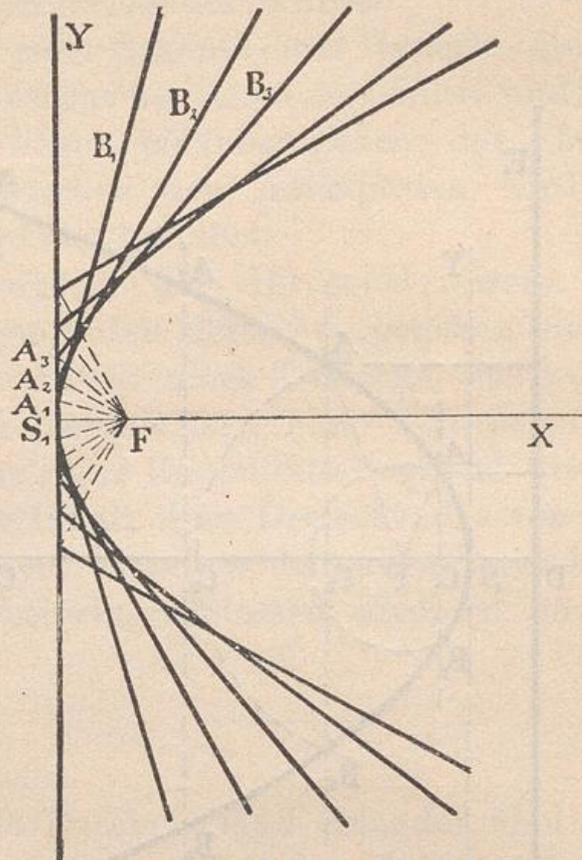
a) DX Achse, SY Scheiteltangente, DE Leitlinie, also $DS = SF = \frac{p}{2}$. — Ziehe in den beliebig, aber zweckmässig gewählten Punkten $C_1, C_2, C_3 \dots$ Lote zur

Axe und beschreibe um F mit DC_1 einen Bogen, der das zu C_1 gehörige Lot in A_1 und B_1 schneidet; ver-



fahre ebenso mit DC_2 u. s. w. $A_1, A_2, A_3 \dots$, $B_1, B_2, B_3 \dots$ sind Parabelpunkte. (Begründung: Jeder Punkt der Parabel hat vom Brennpunkt und der Leitlinie gleiche Abstände.)

b) Durch Umhüllung. — SX Axe, SY Scheiteltangente, F Brennpunkt. Ziehe von F nach SY die Strahlen $FA_1, FA_2, FA_3 \dots$ und errichte auf denselben in $A_1, A_2, A_3 \dots$ die Lote $A_1 B_1, A_2 B_2,$

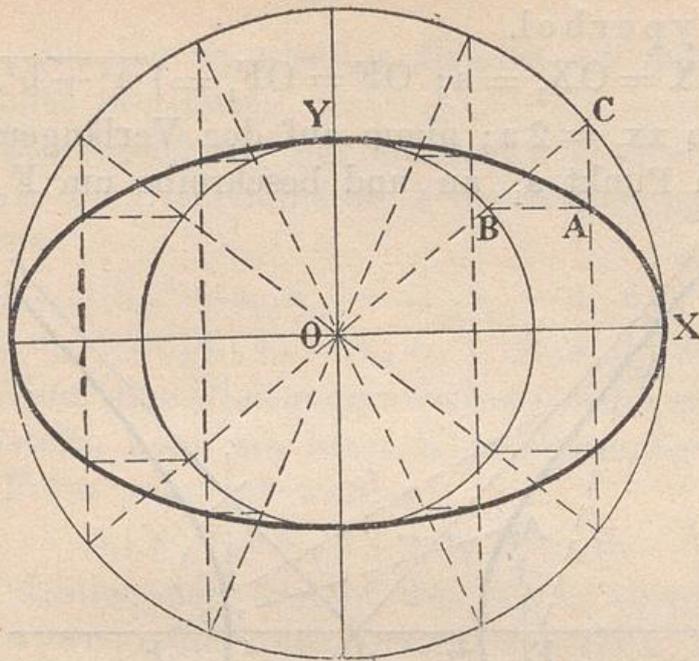


A_3, B_3, \dots , so umhüllen diese die Parabel. (Begründung § 81,12).

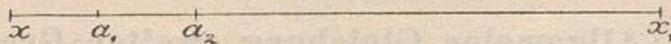
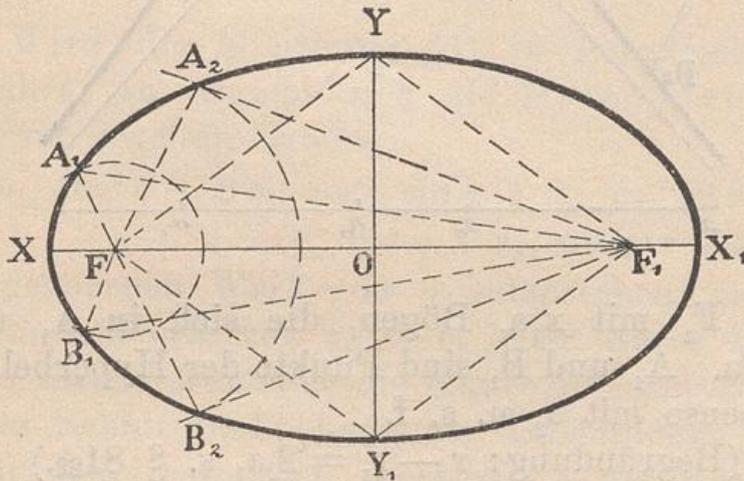
2. Ellipse.

a. $OX = a$, halbe grosse Axe, $OY = b$, halbe kleine Axe. Beschreibe um O mit a und b Kreise; ziehe durch O eine Gerade, welche die Kreise in B und C schneidet, ziehe $CA \perp OX$, $BA \parallel OX$, so ist A ein Punkt der Ellipse. Aehnlich weitere Punkte.

(Begründung: $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$).



b. $OX = OX_1 = a$, $OY = OY_1 = b$. Bestimme die Brennpunkte F und F_1 durch $FY = F_1Y = a$. Ziehe $xx_1 = XX_1 = 2a$; nimm darauf Punkt a beliebig an,



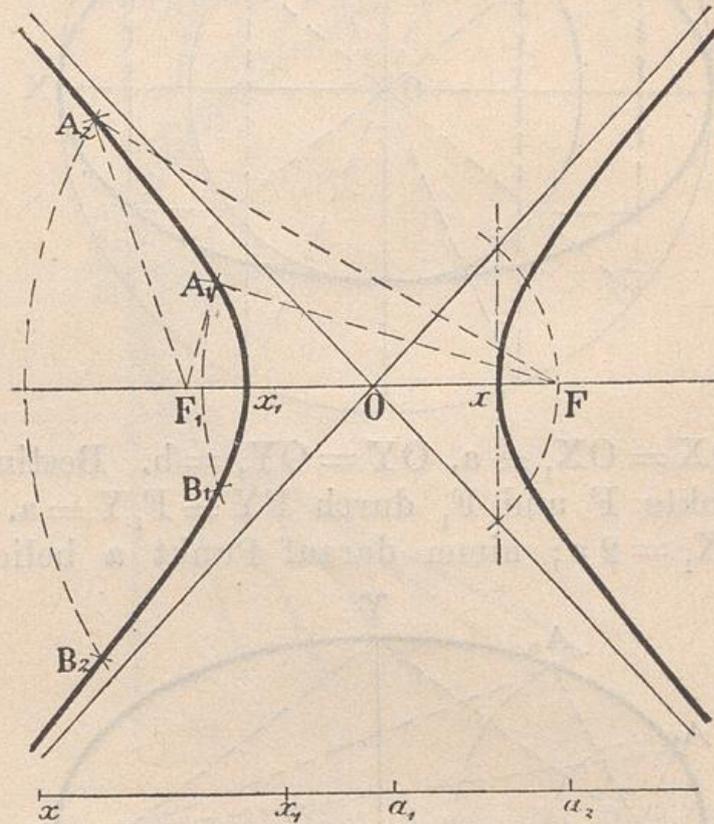
beschreibe um F mit $x a_1$ und um F_1 mit $x_1 a_1$ Kreisbögen, die sich in A_1 und B_1 schneiden u. s. f. A_1 und B_1 sind Punkte der Ellipse.

(Begründung: $r + r_1 = 2a$, s. § 8122.)

3. Hyperbel.

$$OX = OX_1 = a; \quad OF = OF_1 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ziehe $xx_1 = 2a$; nimm auf der Verlängerung von xx_1 einen Punkt a_1 an und beschreibe um F mit xa_1



und um F_1 mit $x_1 a_1$ Bögen, die sich in A_1 und B_1 schneiden. A_1 und B_1 sind Punkte der Hyperbel. Ver-
fahre ebenso mit a_2 u. s. f.

(Begründung: $r - r_1 = 2a$, s. § 8122.)

§ 83. Allgemeine Gleichung zweiten Grades.

$$(1) \quad a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0.$$

1. Nach Division der Gleichung (1) mit a_{33} zeigt sich, dass die Gleichung fünf unabhängige Konstanten

enthält; eine Kurve zweiten Grades ist daher durch fünf Punkte bestimmt.

2. Die Gleichung (1) stellt ein Geradenpaar dar, wenn die Diskriminante Δ der Gleichung null ist, d. h. wenn

$$(a_{12}^2 - a_{11} a_{22})(a_{13}^2 - a_{11} a_{33}) - (a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23})^2 = 0 \text{ oder} \\ \Delta = a_{11} a_{22} a_{33} + 2a_{23} a_{13} a_{12} - a_{11} a_{23}^2 - a_{22} a_{13}^2 - a_{33} a_{12}^2 = 0.$$

3. Wenn eine Gleichung zweiten Grades ein Linienpaar darstellt, kann sie durch Koordinatenverwandlung auf die Form gebracht werden:

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 = 0.$$

Das Linienpaar besteht aus zwei (konjugierten) imaginären, oder aus zwei reellen aber zusammenfallenden, oder aus zwei reellen und verschiedenen Geraden, je nachdem

$$a_{12}^2 - a_{11} a_{22} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0.$$

4. Wird die Gleichung (1) in Polarkoordinaten übergeführt, so ergibt sich als Polargleichung der Kurven zweiten Grades

$$(a_{11} \cos^2 \varphi + 2 a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi) r^2 \\ + 2 (a_{13} \cos \varphi + a_{23} \sin \varphi) r + a_{33} = 0.$$

Einem gegebenen Wert von φ entsprechen im allgemeinen zwei Werte von r , d. h. jeder durch den Pol gezogene Strahl schneidet die Kurve in zwei Punkten. Der eine Schnittpunkt kann im Unendlichen liegen, wenn für den bestimmten Wert von φ der Koeffizient von r^2 zu null wird, d. h. wenn

$$a_{11} \cos^2 \varphi + 2 a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi = 0, \text{ oder wenn} \\ a_{11} + 2 a_{12} \operatorname{tg} \varphi + a_{22} \operatorname{tg}^2 \varphi = 0.$$

Es giebt demnach im allgemeinen zwei solche Werte von φ und also zwei Richtungen, für welche der Strahl die Kurve im Unendlichen schneiden kann; diese beiden

Richtungen sind imaginär, reell aber zusammenfallend, reell und verschieden, d. h. die unendlich ferne Gerade hat mit der Kurve keinen Punkt, zwei zusammenfallende oder zwei verschiedene Punkte gemeinschaftlich, je nachdem

$$a_{12}^2 - a_{11} a_{22} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 0.$$

5. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem

$$a_{12}^2 - a_{11} a_{22} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 0.$$

Sie stellt einen Kreis dar, wenn $a_{12} = 0$ und $a_{11} = a_{22}$.

6. Durch jeden Punkt kann im allgemeinen eine Sehne so gezogen werden, dass sie in ihm halbiert wird; ist die Kurve zweiten Grades durch die allgemeine Polargleichung gegeben, so hat eine Sehne vom Neigungswinkel φ den Pol zur Mitte, wenn die beiden Wurzeln von r von entgegengesetztem Vorzeichen und gleich sind. Dies ist der Fall, wenn

$$a_{13} \cos \varphi + a_{23} \sin \varphi = 0$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten, wenn

$$a_{13} x + a_{23} y = 0.$$

Giebt man nach einer Koordinatenverwandlung (Parallelverschiebung) den Koeffizienten a_{13}' und a_{23}' den Wert null, so ergeben sich daraus die Bestimmungsstücke des Mittelpunktes.

Die rechtwinkligen Koordinaten (x_0, y_0) des Mittelpunktes ergeben sich aus

$$\begin{aligned} a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13} &= 0 \\ a_{12} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23} &= 0, \end{aligned}$$

daher besitzt eine Linie zweiten Grades nicht mehr als einen Mittelpunkt. Seine Koordinaten sind

$$\begin{cases} x_0 = \frac{a_{22} a_{13} - a_{12} a_{23}}{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}} \\ y_0 = \frac{a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}}{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}. \end{cases}$$

Für die Parabel ist $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = 0$, sie hat daher keinen Mittelpunkt.

§ 84. Gleichungen weiterer Kurven.

A. Algebraische Kurven.

1. Neilsche Parabel $y = a x^{\frac{3}{2}}$.
2. Lemniskate $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$ oder $r^2(r^2 - a^2 \cos 2\varphi) = 0$
3. Conchoide $x^2 y^2 = (b + y)^2(a^2 - y^2)$ oder $(x^2 + y^2)(y - b)^2 = a^2 y^2$ oder $r = a + \frac{b}{\cos \varphi}$.
4. Cissoide $y^2(a - x) = x^3$.
5. Deskartes'sches Blatt $x^3 + y^3 = 3axy$.
6. Cassinische Kurve $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = b^4 - a^4$.
7. Cardioide $(y^2 + x^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ oder $r = a(1 + \cos \varphi)$.

B. Transcendente Kurven.

1. Logarithmische Linie $y = m e^{\frac{x}{a}}$.
2. Kettenlinie $y = \frac{m}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$.
3. Cykloide, beschrieben von einem bestimmten Punkt P auf dem Halbmesser eines Kreises, der auf einer Geraden rollt, (a Halbmesser des rollenden Kreises, a_1 Mittelpunktsabstand von P, $\varphi = \text{arc } \sphericalangle POX$, X Berührungspunkt)

$$\begin{cases} x = a\varphi - a_1 \sin \varphi \\ y = a - a_1 \cos \varphi \end{cases}$$

4. Epycykloide, beschrieben von dem Punkt P (s. Nr. 3), wenn der Kreis auf der Aussenseite eines Kreises (Halbmesser b), rollt

$$\begin{cases} x = (a + b) \sin \frac{a\varphi}{b} - a_1 \sin \frac{a + b}{b} \varphi \\ y = (a + b) \cos \frac{a\varphi}{b} - a_1 \cos \frac{a + b}{b} \varphi. \end{cases}$$

5. Hypocykloide, beschrieben von dem Punkt P (s. Nr. 3), wenn der Kreis auf der Innenseite eines Kreises (Halbmesser b) rollt

$$\begin{cases} x = (b - a) \sin \frac{a\varphi}{b} - a_1 \sin \frac{b - a}{b} \varphi \\ y = (b - a) \cos \frac{a\varphi}{b} + a_1 \cos \frac{b - a}{b} \varphi. \end{cases}$$

Die Cykloide, ebenso die Epi- und Hypocykloide ist die gestreckte, gemeine oder verschlungene, je nachdem $a_1 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} a$.

6. Spirale des Archimedes (lineare Spirale) $r = a\varphi$.

7. Parabolische Spirale $r^2 = 2p\varphi$.

8. Hyperbolische Spirale $r = \frac{a}{\varphi}$.

9. Logarithmische Spirale $r = m e^{a\varphi}$.

10. Kreisevolvente (Tangente = dem Bogen zwischen einem festen Punkt des Kreises und dem Berührungspunkt): $r = a \sqrt{1 + \varphi^2}$, $\psi = \varphi - a \operatorname{arctg} \varphi$.