Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

A. Differentialrechnung.

Höhere Analysis.

A. Differentialrechnung.

§ 92. Funktion; unendlich kleine Grössen; Differentialquotient.

Funktionen.

1. Eine Zahl von unveränderlichem Wert 3, 5, a, 3a — b . . .) heisst eine Konstante; eine Zahl, welche alle Werte der Zahlenreihe annehmen kann, heisst eine Veränderliche (in der Regel bezeichnet mit t, x, y, z).

2. Eine Zahl, welche von einer oder mehreren Veränderlichen abhängt, heisst eine Funktion derselben. Der Inhalt eines Kreises, einer Kugel ist eine Funktion des Halbmessers; derjenige eines Rechtecks, eines Quaders ist eine Funktion von Länge und Breite, bezw. Länge, Breite und Höhe. Mit dem Wert der unabhängigen Veränderlichen ändert sich der Wert der Funktion, der abhängigen Veränderlichen.

Bezeichnung der Funktion: $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ und dergleichen,

$y = f(x)$ ist eine Funktion von einer unabhängigen Veränderlichen x,

$z = f(x, y)$ ist eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen, x und y,

$u = f(x, y, z)$ ist eine Funktion von drei unabhängigen Veränderlichen, x, y und z.

3. $y = f(x)$, $z = f(x, y)$ u. s. f. heissen entwickelte (explizite) Funktionen.

$F(x, y) = 0$, $F(x, y, z) = 0$ u. s. f. heissen unentwickelte (implizite) Funktionen.

4. Kommt jede unabhängige Veränderliche nur als Summand, Subtrahend, Faktor, Divisor oder als Basis einer ganzen oder gebrochenen Potenz vor, so heisst die Funktion algebraisch. Es ist z. B. y eine algebraische Funktion von x, wenn es gleich $a \pm x$, ax, $\frac{a}{x}$, x^a, $\sqrt[a]{x}$, $a + bx + cx^2$, $\sqrt{a^2 - x^2}$ u. s. f. ist. In allen übrigen Fällen heisst die Funktion transcendent; z. B. $y = a^x$, $y = \log x$, $y = \sin x$ u. s. f. sind transcendente Funktionen.

5. Eine Funktion heisst stetig zwischen x_0 und x_1, wenn für alle Werte zwischen x_0 und x_1 einem unendlich kleinen Wachstum von x auch ein unendlich kleines Wachstum von f (x) entspricht.

Unendlich kleine Grössen und Grenzwerte.

6. Wenn eine veränderliche Grösse sich der Null nähert und dabei einen Wert annimmt, der kleiner ist als jede angebbare Grösse, so nennt man sie unendlich klein.

7. Zwei unendlich kleine Grössen heissen von derselben Ordnung, wenn ihr Quotient gegen einen von null verschiedenen, endlichen Grenzwert konvergiert. Ist a eine endliche, γ eine unendlich kleine Grösse, so ist $a\gamma$ von derselben Ordnung wie γ.

8. Ist δ von der ersten Ordnung, so ist γ von der nten Ordnung, wenn der Quotient $\frac{\gamma}{\delta^n}$ gegen einen endlichen, von null verschiedenen Wert konvergiert, also wenn

$$\lim \frac{\gamma}{\delta^n} = q.$$

9. Ist eine endliche Grösse Γ gleich der Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen γ_1, γ_2 . . ., so bleibt Γ unverändert, wenn jede Grösse γ um ein Unendlich kleines ε von höherer Ordnung vermehrt wird. Ist also

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots = \lim \Sigma \gamma, \text{ so ist auch}$$

$$\Gamma = (\gamma_1 + \varepsilon_1) + (\gamma_2 + \varepsilon_2) + \ldots = \lim \Sigma (\gamma + \varepsilon).$$

10. Es ist

1. $\lim (1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}}_{\delta = 0} = e$, $\lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m_{m = \infty} = e$;

2. $\lim \left.\frac{a^\delta - 1}{\delta}\right|_{\delta = 0} = \frac{\log a}{\log e}$.

3. $\lim \left.\frac{\sin \delta}{\delta}\right|_{\delta = 0} = 1$; $\lim \left.\frac{\operatorname{tg} \delta}{\delta}\right|_{\delta = 0} = 1$.

4. $\lim \left.\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m\right|_{m = \infty} = e^x$.

11. Differential und Differentialquotient.

$$\begin{array}{l} y = f(x) \\ y + \Delta y = f(x + \Delta x) \\ \hline \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \end{array}$$

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = \frac{df(x)}{dx}$$

$$= f'(x) = D f(x).$$

dx heisst das Differential von x, $df(x) = f'(x)\,dx$ das Differential von $f(x)$. $\frac{df(x)}{dx}$ oder $f'(x)$ heisst die erste Ableitung oder der erste Differentialquotient von $f(x)$.

Ist C eine von x unabhängige Konstante, so ist $\frac{dC}{dx} = 0$.

Die Ableitung des ersten Differentialquotienten giebt den zweiten u. s. f.; es ist also

$\frac{d f'(x)}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = f''(x) = D^2 f(x)$ die zweite Ableitung von $f(x)$.

§ 93. Allgemeine Formeln über Differentiation.

Es seien u, v, w Funktionen von x, A, B, C Konstanten.

1. $$\frac{d f(u)}{dx} = \frac{d f(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

2. $$d(Au + Bv + Cw) = A\,du + B\,dv + C\,dw$$
$$\frac{d(Au + Bv + Cw)}{dx} = A\frac{du}{dx} + B\frac{dv}{dx} + C\frac{dw}{dx}$$
$$= Au' + Bv' + Cw'$$

3. $$d(uv) = v\,du + u\,dv;\quad d(uvw) = vw\,du + uw\,dv + uv\,dw$$
$$\frac{d(uv)}{dx} = u'v + uv' = uv\left(\frac{1}{u}.u' + \frac{1}{v}v'\right)$$
$$\frac{d(uvw\ldots)}{dx} = uvw\ldots\left(\frac{1}{u}u' + \frac{1}{v}v' + \frac{1}{w}w' + \ldots\right)$$

4. $$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$
$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

5. Bezeichnet man die nte Ableitung von u mit $u^{(n)}$ so ist:

$$\frac{d^n(Au + Bv)}{dx^n} = A u^{(n)} + B v^{(n)}$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v^{(1)} + \binom{n}{2} u^{(n-2)} v^{(2)} + \ldots$$
$$+ \binom{n}{1} u^{(1)} v^{(n-1)} + u v^{(n)}$$

6. Ist $u=f(z)$, $z=\varphi(y)$, $y=\psi(x)$, dann ist

$$\frac{du}{dx}=\frac{dfz}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

7. Sind x und y Funktionen von t, so ist:

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=y':x'$

2. $\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)^3=\frac{x'y''-y'x''}{(x')^3}$

8. Betrachtet man bei einer Funktion mehrerer unabhängiger Veränderlicher $u=f(x, y, z)$ irgend eine derselben, z. B. x, als veränderlich, die übrigen als konstant, so heisst die Ableitung der Funktion nach dieser Veränderlichen die partielle Ableitung nach x, sie wird mit $\frac{\delta u}{\delta x}$ bezeichnet.

Das totale Differential von u ist gleich der Summe der partiellen Differentiale nach sämtlichen Veränderlichen:

$$du=\frac{\delta u}{\delta x}dx+\frac{\delta u}{\delta y}dy+\frac{\delta u}{\delta z}dz$$

9. Sind x, y, z Funktionen von t, dann ist

$$\frac{df(x,y,z)}{dt}=\frac{\delta f}{\delta x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\delta f}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\delta f}{\delta z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

10. Es ist

$$\frac{\delta\frac{\delta u}{\delta x}}{\delta x}=\frac{\delta^2 u}{\delta x^2};\quad \frac{\delta\frac{\delta u}{\delta x}}{\delta y}=\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y};\quad \frac{\delta\frac{\delta u}{\delta y}}{\delta x}=\frac{\delta^2 u}{\delta y\delta x};$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}=\frac{\delta^2 u}{\delta y\delta x}$$

11. $d^2u=\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}dx^2+\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}dy^2+\frac{\delta^2 u}{\delta z^2}dz^2$

$$+2\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta y}dxdy+2\frac{\delta^2 u}{\delta x\delta z}dxdz+2\frac{\delta^2 u}{\delta y\delta z}dydz$$

symbolisch:

$$d^2 u = \left(\frac{\delta u}{\delta x} dx + \frac{\delta u}{\delta y} dy + \frac{\delta u}{\delta z} dz\right)^{(2)},$$

wofern im Zähler jeden Gliedes δu^2 durch $\delta^2 u$ ersetzt wird. — Der Satz gilt ebenso auch für das Differential nter Ordnung.

12. Unentwickelte (implizite) Funktionen. Ist $f(x, y) = 0$, so ist

1) $\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$, daher

2) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}}$$

Durch Differenzieren von 1) erhält man eine Gleichung, aus der sich $\frac{d^2 y}{dx^2}$ bestimmt:

3) $$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + 2\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

13. Ist $f(x, y, z) = 0$, so kann z als Funktion von x und y betrachtet werden, dann ist

1) $\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta x} = 0$, hieraus folgt $\frac{\delta z}{\delta x}$;

2) $\frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta y} = 0$, " " $\frac{\delta z}{\delta y}$.

Differenziert man Gleichung 1) nach x, dann auch nach y, ferner Gleichung 2) nach y, so ergeben sich Gleichungen, aus welchen man $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}$, $\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$ erhält.

14. Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.

$$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2x}{dy^2} : \left(\frac{dx}{dy}\right)^3$$

§ 94. Spezielle Formeln.

1. Das Differential und der Differentialquotient einer Konstanten ist null.

2. $\frac{dx^n}{dx} = n\,x^{n-1}$

3. $\frac{d^r(x^n)}{dx^r} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\,x^{n-r},\ r \leqq n$

---

4. $\frac{da^x}{dx} = a^x\,la;\quad \frac{da^{mx}}{dx} = a^{mx}\,m\,l\,a;\quad \frac{de^x}{dx} = e^x$

5. $\frac{d^r(a^x)}{dx^r} = a^x(l\,a)^r$

---

6. $\frac{d\,\overset{a}{\log}\,x}{dx} = \frac{1}{x}\,\overset{a}{\log}\,e = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{la} = \frac{M}{x}$ (s. § 29_7.)

$\frac{d\,lx}{dx} = \frac{1}{x}$

7. $\frac{d^r(\log x)}{dx^r} = (-1)^{r-1}(r-1)!\,\frac{\log e}{x^r}$

---

8. $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

9. $\frac{d^r\sin x}{dx^r} = \sin\left(x + \frac{r\pi}{2}\right)$

10. $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

11. $\frac{d^r\cos x}{dx^r} = \cos\left(x + \frac{r\pi}{2}\right)$

12. $\frac{d\,tg\,x}{d\,x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(= \sec^2 x)$

(Für höhere Ableitungen kein einfaches Bildungsgesetz.)

13. $\frac{d\,ctg\,x}{d\,x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $(= -\operatorname{cosec}^2 x)$.

---

14. $\frac{d\,arc\,\sin x}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $\frac{d\,arc\,\cos x}{d\,x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $\frac{d\,arc\,tg\,x}{d\,x} = \frac{1}{1+x^2}$

17. $\frac{d\,arc\,ctg\,x}{d\,x} = -\frac{1}{1+x^2}$

18. $\frac{d\,arc\,\sec x}{d\,x} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

19. $\frac{d\,arc\,\operatorname{cosec} x}{d\,x} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

§ 95. Die Taylor'sche und die Mac Laurin'sche Reihe.

1. Taylor'sche Reihe:

$$f(x+h) = f(x) + h\,f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\mu h),$$

wofern μ positiv und < 1, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)\ldots.$ endliche und bestimmte Werte haben und wofern $f^{(n+1)}(x)$ endich und stetig für alle Werte zwischen x und $x+h$.

Andere Formen des Restgliedes:

$$\frac{h^{n+1}(1-\Theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x+\Theta h),\ \Theta \text{ echter Bruch};$$

$$\frac{h^n}{n!}\left[f^{(n)}(x+\Theta h) - f^{(n)}(x)\right]$$

Für $x = a$ und $h = a - x$ ergiebt sich:

$$2.\ f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\big(a + \mu (x-a)\big).$$

Hiebei muss $f^{(n+1)}(x')$ für alle Werte von x' zwischen a und x endlich und stetig bleiben.

Für $a = 0$ ergiebt sich:

3. Mac Laurin'sche Reihe:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\mu x),$$

wofern f(x) und seine Ableitungen für $x = 0$ endlich und stetig bleiben.

Andere Form des Restgliedes:

$$\frac{x^{n+1}(1-\Theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\Theta x).$$

Wird f(x) oder eine seiner Ableitungen für $x = 0$ unendlich oder unstetig, so kann f(x) nicht mehr vermittelst der Mac Laurin'schen Reihe entwickelt werden. In diesem Fall ist 2. anzuwenden.

4. Taylor's Reihe für zwei Veränderliche.

$x + ht = p$, $y + kt = q$, $f(p, q) = U$, $f(x, y) = u$,

$$f(x+h,\ y+k) = u + \frac{\delta u}{\delta x} h + \frac{\delta u}{\delta y} k + \frac{1}{2!}\left(\frac{\delta u}{\delta x} h + \frac{\delta u}{\delta y} k\right)^{(2)} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta u}{\delta x} h + \frac{\delta u}{\delta y} k\right)^{(3)} + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\delta u}{\delta x} h + \frac{\delta u}{\delta y} k\right)^{(n)} + R.$$

(s. § 93 11.)

$$R = \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\delta U}{\delta p} h + \frac{\delta U}{\delta q} k\right)^{(n)} - \left(\frac{\delta u}{\delta x} h + \frac{\delta u}{\delta y} k\right)^{(n)}\right],$$

$$(p = x + \Theta h,\ q = y + \Theta k).$$

§ 96. Werte unbestimmter Ausdrücke.

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty,\ \infty-\infty.$$

1. Nimmt $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x=a$ den Wert $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ an,

so ist $$\lim\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)};$$

wird auch $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}=\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, so wird das Verfahren wiederholt und es ist, wenn $f^{(n+1)}(a)$ und $\varphi^{(n+1)}(a)$ diejenigen Ableitungen sind, welche zuerst nicht gleichzeitig zu 0 oder zu ∞ werden:

$$\lim\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f^{(n+1)}(a)}{\varphi^{(n+1)}(a)}$$

2. Ist $f(x).\varphi(x)=0.\infty$ für $x=a$, so ist:

$$f(x).\varphi(x)=f(x):\frac{1}{\varphi(x)}.$$

Dieser letztere Ausdruck nimmt für $x=a$, die Form $\frac{0}{0}$ an, sein Wert ergiebt sich nach 1.

3. Nimmt der Ausdruck $(f(x))^{\varphi(x)}$ für $x=a$ eine der Formen 0^0, ∞^0, 1^∞ an, so setzt man $(f\,x))^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\,l\,f(x)}$ und untersucht nach 1. oder 2. den Ausdruck $\varphi(x)\,l\,f(x)$.

4. Führen die angegebenen Mittel stets wieder zu demselben unbestimmten Ausdruck, so muss man zu besonderen Hilfsmitteln greifen. Man kann dann für x zunächst $a+h$ setzen, den Ausdruck umformen und wenn möglich, vereinfachen, worauf sich für $h=0$ der gesuchte Wert ergeben kann.

5. Wenn $f(x)-\varphi(x)$ für $x=a$ die unbestimmte

Form $\infty - \infty$ annimmt, so suche man den Ausdruck in ein Produkt oder in einen Bruch zu verwandeln, was z. B. folgendermassen geschehen kann:

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{\varphi(x)}}$$

Der Wert hiefür wird nach dem Vorausgegangenen ermittelt.

§ 97. Grösste und kleinste Werte von Funktionen.

1. Die Funktion $y = f(x)$ erreicht für $x = a$
ein Maximum, wenn $f(a \pm h) - f(a) < 0$,
„ Minimum, „ $f(a \pm h) - f(a) > 0$,
wobei h sich der Null unbegrenzt nähert.

2. Bei zunehmendem x ist
f(x) wachsend, wenn $f'(x) > 0$,
f(x) abnehmend, „ $f'(x) < 0$.

3. $y = f(x)$ erreicht für $x = a$
ein Maximum, wenn $f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0$,
„ Minimum, „ $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$;
allgemein: die Funktion $y = f(x)$ erreicht für $x = a$ ein Maximum, wenn die niederste für $x = a$ nicht verschwindende Ableitung von f(x) von gerader Ordnung und negativ, ein Minimum, wenn dieselbe positiv ist.

Ist die niederste für $x = a$ nicht verschwindende Ableitung von ungerader Ordnung (z. B. von erster), so ist f(a) weder ein Maximum noch ein Minimum.

Um die Stelle und den Wert des Maximums oder Minimums zu finden, wird y' gebildet, gleich null gesetzt und nach x aufgelöst. Nun wird y'' gebildet, es werden die gefundenen Werte von x eingesetzt und aus dem negativen oder positiven Ergebnis bestimmt, ob ein Maximum oder Minimum vorliegt. Durch Einsetzen der gefundenen Werte von x in $y = f(x)$ ergiebt sich der Wert des Maximums oder Minimums selbst.

4. Funktion zweier unabhängigen Veränderlichen, $z = f(x, y)$.

Man bestimme x und y aus

$$1. \quad \frac{\delta f}{\delta x} = 0 \text{ und } \frac{\delta f}{\delta y} = 0.$$

Die erhaltenen Werte müssen der Gleichung genügen:

$$2. \quad \left(\frac{\delta f}{\delta x \, \delta y}\right)^2 - \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} < 0.$$

Es findet dann Maximum oder Minimum statt, je nachdem

$$3. \quad \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \text{ und } \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$$

für jene Werte von x und y beide gleichzeitig < 0 oder > 0 sind.

B. Integralrechnung.

§ 98. Bezeichnung und Erklärung.

$F(x)$ heisst das Integral von $f(x)\,dx$, geschrieben $\int f(x)\,dx$, wenn

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x);$$

es ist also dann $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, wobei C eine unbestimmte Konstante bedeutet; ferner ist

$$\frac{d\int f(x)\,dx}{dx} = f(x).$$