# Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

B. Integralrechnung.

ein Maximum oder Minimum vorliegt. Durch Einsetzen der gefundenen Werte von x in $y = f(x)$ ergiebt sich der Wert des Maximums oder Minimums selbst.

4. Funktion zweier unabhängigen Veränderlichen, $z = f(x, y)$.

Man bestimme x und y aus

$$1. \quad \frac{\delta f}{\delta x} = 0 \text{ und } \frac{\delta f}{\delta y} = 0.$$

Die erhaltenen Werte müssen der Gleichung genügen:

$$2. \quad \left(\frac{\delta f}{\delta x\, \delta y}\right)^2 - \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \cdot \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} < 0.$$

Es findet dann Maximum oder Minimum statt, je nachdem

$$3. \quad \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \text{ und } \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$$

für jene Werte von x und y beide gleichzeitig $< 0$ oder $> 0$ sind.

## B. Integralrechnung.

### § 98. Bezeichnung und Erklärung.

$F(x)$ heisst das Integral von $f(x)\,dx$, geschrieben $\int f(x)\,dx$, wenn

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x);$$

es ist also dann $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, wobei C eine unbestimmte Konstante bedeutet; ferner ist

$$\frac{d\int f(x)\,dx}{dx} = f(x).$$

**§ 99. Integration einfacher Funktionen; Grundformeln.**

Bei sämtlichen nachstehenden Formeln ist rechts die unbestimmte Konstante zu ergänzen.

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ für $n \lessgtr -1$

$\int (a + b\,x)^n = \frac{(a+b\,x)^{n+1}}{(n+1)\,.\,b}.$

2. $\int \frac{dx}{x} = l\,x.$

3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{l\,a}$; $\int e^x\,dx = e^x.$

4. $\int \cos x\,dx = \sin x.$

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$

8. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{\cos x}$ $(= \sec x).$

9. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\sin x}$ $(= -\operatorname{cosec} x).$

10. $\int \sin x \cos x\,dx = \frac{\sin^2 x}{2}.$

---

11. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -l \cos x.$

12. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = l \sin x.$

13. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = l\operatorname{tg} x$; $\int \frac{dx}{\sin x} = l\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

14. $\int \frac{dx}{\cos x} = l\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$

---

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x = -\arccos x + \frac{\pi}{2}.$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = \frac{1}{b} \arcsin \frac{bx}{a}.$

16. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x = -\operatorname{arc\,ctg} x + \frac{\pi}{2}.$

$\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \frac{bx}{a}.$

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc\,sec} x$

$\int \frac{dx}{x\sqrt{b^2x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,sec} \frac{bx}{a}.$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = -\arcsin(1-x).$

## § 100. Allgemeine Formeln; Integrationsweisen entwickelter Funktionen.

Es seien u, v, w .... Funktionen von x; A, B... konstante Faktoren.

1. Integration einer Summe.

$\int(Au + Bv + Cw + \ldots)dx = A\int u\,dx + B\int v\,dx + C\int w\,dx + \ldots$

2. Teilweise Integration.

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du \text{ und}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Beispiel:

$\int x^2 \cos x\,dx = \int x^2 d \sin x = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,dx$

$\int x \sin x\,dx = -\int x\,d\cos x = -x\cos x + \int \cos dx$

$= -x\cos x + \sin x + C$, also

$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$

3. Integration durch Substitution. Es sei $x = \varphi(z)$, dann ist $dx = \varphi'(z)\,dz$,

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz.$$

Beispiel: $\int \frac{dx}{x^m (a + bx)^n}$. Man setzt $\frac{a}{x} + b = z$, dann ergiebt sich

$$-\frac{1}{a^{m+n-1}} \int \frac{(z-b)^{m+n-2}}{z^n}\,dz;$$

nun entwickelt man nach dem binomischen Lehrsatz und integriert die einzelnen Summanden.

Die häufigsten Substitutionen sind:

$z = a + bx$; $z = a + bx^2$; $z = \frac{a}{x} + b$.

$z = \frac{a + bx}{a - bx}$, oder $x = \frac{a}{b} \cdot \frac{z-1}{z+1}$;

$\sqrt[m]{a + bx} = z$, oder $x = \frac{z^m - a}{b}\, x\,dx = \frac{m}{b} \cdot z^{m-1}\,dz$;

$\sin x = z$ und $dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$.

$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

4. Integration durch Zerlegung in Teilbrüche.

Jede unecht gebrochene, rationale Funktion $\frac{\psi(x)}{F(x)}$ lässt sich in eine ganze Funktion $\varphi(x)$ und eine echt gebrochene, rationale Funktion $\frac{f(x)}{F(x)}$ umformen. Diese letztere lässt sich in eine Summe von Teilbrüchen zerlegen.

1. Die Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ seien sämtlich reell und untereinander verschieden, es sei

$$F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots = 0,$$

dann ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots.$$

hiebei ist

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)},\ B = \frac{f(b)}{F'(b)}, \ldots.$$

2. $F(x) = 0$ hat auch komplexe Wurzeln, z. B. $p + qi$ und $p - qi$, dann ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x - p - qi} + \frac{A_2}{x - p + qi} + \frac{\varphi(x)}{\Phi(x)},$$

hiebei ist

$$A_1 = \frac{f(p+qi)}{F'(p+qi)},\ A_2 = \frac{(f(p-qi)}{F'(p-qi)}.$$

Fasst man nach der Bestimmung von $A_1$ und $A_2$ die beiden ersten Brüche zusammen, so geben sie einen reellen Bruch mit dem Nenner $(x-p)^2 + q^2$.

3. Mehrfache Wurzeln. Es sei

$F(x) = 0 = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots.$, dann ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots. + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$

$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots. + \frac{B_{\beta-1}}{x-b}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzt man $F(x) = (x-a)^\alpha . \varphi(x)$, so ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)},\ \text{woraus}$$

$$A = \frac{f(a)}{\varphi(a)};$$

durch Anwendung desselben Verfahrens auf den Bruch $\frac{f_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\varphi(x)}$ erhält man $A_1$ u. s. f.

Das Integral der ursprünglichen, gebrochenen Funktion ergiebt sich nun durch die Integration der einzelnen Teile.

5. Integration durch unendliche Reihen.

1. Wenn $f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ eine Reihe ist, deren Glieder stetige Funktionen einer Veränderlichen x sind, wenn ferner diese Reihe für a und b und alle Werte zwischen a und b konvergent ist und wenn f(x) die Grenze ist, gegen die sie konvergiert, so ist (s. § 101,1)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \int_a^b u_3\,dx + \ldots$$

2. Liefert die Mac Laurinsche Reihe für f(x) eine konvergente Reihe

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots,$$

so ist

$$\int f(x)\,dx = C + x\,f(0) + \frac{x^2}{2!} f'(0) + \frac{x^3}{3!} f''(0) + \ldots$$

Die Integration durch unendliche Reihen besteht also darin, dass man den betreffenden Ausdruck (z. B. durch den binomischen Lehrsatz, die logarithmische Reihe u. a.) in eine unendliche Reihe verwandelt und, nach Untersuchung der Konvergenzverhältnisse, die einzelnen Glieder derselben integriert.

## § 101. Bestimmte Integrale.

1. Ist $f(x)\,dx$ das Differential von $\varphi(x)$, so ist $\varphi(x) + C$ das unbestimmte Integral von $f(x)\,dx$; dagegen heisst

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

das bestimmte Integral genommen zwischen den Grenzen a und b, d. h. für $x = a$ und $x = b$. Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ ist die Grenze der Summe der unendlich kleinen Werte des Differentials $f(x)\,dx$, wenn x durch unendlich kleine Aenderungen h von a in b übergeht; daher auch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \left\{ f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots \right\} . h.$$

2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

3. $\int_a^b [f(x)\,dx \pm \varphi(x)\,dx] = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx.$

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx,$

c und d Werte zwischen a und b.

5. Angenäherte Berechnung eines bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$. — Es sei für jeden Wert von x zwischen a und b für eine Funktion $\varphi(x)$

$\varphi(x) < f(x)$, desgleichen für eine zweite $\psi(x)$

$\psi(x) > f(x)$, dann ist

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Simpsonsche Regel. Um einen Näherungswert von $\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\,dx$ zu finden, teile man die Strecke zwischen $x_0$ und $x_{2n}$ in 2 n gleiche Teile von der Länge h, und bestimme die zu den Teilpunkten gehörigen Ordinaten $y_0, y_1, y_2 \ldots y_{2n}$, dann ist annähernd

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + y_{2n})$$

(s. auch § $102_{10}$).

6. Summierung von Reihen durch bestimmte Integrale.

Wird $f(x, m)\,dx$ zwischen zwei Grenzen a und b, die von m unabhängig sind integriert, so ist das Ergebnis im allgemeinen wieder eine Funktion von m, so dass also

$\int_a^b f(x, m)\,dx = \varphi(m)$, daher

$$\int_a^b \left[f(x,0)+f(x,1)+f(x,2)+\ldots+f(x,n-1)\right]dx$$
$$=\varphi(0)+\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(n-1).$$

Lässt sich die unter dem Integralzeichen stehende Reihe leicht summieren, so erhält man die Summe der rechts stehenden Reihe in Form eines bestimmten Integrals.*)

7. Besondere bestimmte Integrale

1. $\int_0^\infty \frac{dx}{a+bx^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$

2. $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\pi$

3. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$; $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=1$

4. $\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\ldots.2n}\cdot\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x\,dx=\frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\ldots.2n}\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}x\,dx;\ 2n>0$$

5. $\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{2.4.6.\ldots.2n}{1.3.5.\ldots.(2n+1)}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x\,dx=\frac{2.4.6.\ldots.2n}{1.3.\ldots.(2n+1)}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x\,dx;\ 2n+1>1$$

6. $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$; $a>0$

*) Siehe Schlœmilch, Uebgsbch. z. St. d. höh. An. 2. Teil, S. 168.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos a x}{x} d x = \infty$$

7. $\int_0^{\infty} e^{-x} d x = 1; \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$

8. $\int_0^{\infty} x^n e^{-a x} d x = \frac{n!}{a^{n+1}}$ ($a > 0$, n ganze Zahl.)

## C. Anwendung der Infinitesimalrechnung auf Geometrie.

### § 102. Ebene Kurven.

1. Ist $y = f(x)$ die Gleichung einer Kurve, $\tau$ der Winkel der Tangente mit der Xaxe, dann ist (ds s. § $102^4$):

$$\sin \tau = \frac{d y}{d s}, \quad \cos \tau = \frac{d x}{d s}, \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{d y}{d x} = y'.$$

Wenn $y' = 0$, dann ist die Tangente parallel der Xaxe, ist $y' = \infty$, so ist sie parallel der Yaxe.

2. Verlauf. Die Kurve steigt (d. h. y wächst) bei zunehmendem x, wenn $y' > 0$, sie fällt, wenn $y' < 0$.

Die Kurve ist in irgend einem Punkt erhaben (konvex) gegen die Xaxe, wenn y und $y''$ für diesen Punkt gleiche Zeichen haben; im andern Fall ist sie hohl (konkav) gegen die Xaxe (s. § $97_3$).

3. Besondere Punkte. Die Kurve hat in einem bestimmten Punkt einen Wendepunkt, wenn für denselben $y'$ ein Maximum oder Minimum erreicht, also wenn $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$, während $\frac{d^3 y}{d x^3} \lessgtr 0$.

Ein Punkt ist ein vielfacher Punkt, wenn sich mehrere Kurvenzweige in ihm schneiden, es müssen sich also mehrere Werte von $y'$ ergeben $\left(\frac{\delta F}{\delta x} = 0, \frac{\delta F}{\delta y} = 0\right)$.