Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

C. Anwendung der Infinitesimalrechnungen auf Geometrie.

$$\int_0^\infty \frac{\cos a x}{x} d x = \infty$$

$$7. \int_0^\infty e^{-x} d x = 1; \int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$8. \int_0^\infty x^n e^{-a x} d x = \frac{n!}{a^{n+1}} \text{ (a > 0, n ganze Zahl.)}$$

C. Anwendung der Infinitesimalrechnung auf Geometrie.

§ 102. Ebene Kurven.

1. Ist $y = f(x)$ die Gleichung einer Kurve, τ der Winkel der Tangente mit der Xaxe, dann ist (ds s. § 102[4]):

$$\sin \tau = \frac{d y}{d s}, \cos \tau = \frac{d x}{d s}, \operatorname{tg} \tau = \frac{d y}{d x} = y'.$$

Wenn $y' = 0$, dann ist die Tangente parallel der Xaxe, ist $y' = \infty$, so ist sie parallel der Yaxe.

2. Verlauf. Die Kurve steigt (d. h. y wächst) bei zunehmendem x, wenn $y' > 0$, sie fällt, wenn $y' < 0$.

Die Kurve ist in irgend einem Punkt erhaben (konvex) gegen die Xaxe, wenn y und y'' für diesen Punkt gleiche Zeichen haben; im andern Fall ist sie hohl (konkav) gegen die Xaxe (s. § 97_3).

3. Besondere Punkte. Die Kurve hat in einem bestimmten Punkt einen Wendepunkt, wenn für denselben y' ein Maximum oder Minimum erreicht, also wenn $\frac{d^2 y}{d x^2} = 0$, während $\frac{d^3 y}{d x^3} \lessgtr 0$.

Ein Punkt ist ein vielfacher Punkt, wenn sich mehrere Kurvenzweige in ihm schneiden, es müssen sich also mehrere Werte von y' ergeben $\left(\frac{\delta F}{\delta x} = 0, \frac{\delta F}{\delta y} = 0\right)$.

Werden dieselben imaginär, so ist der Punkt ein isolierter Punkt; giebt es für y' zusammenfallende Werte, so ist der Punkt ein Rückkehrpunkt. In zweifelhaften Fällen ist eine Untersuchung der Kurve in der Nähe des Punktes nötig.

4. Längen.

Bogenelement $ds = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$.

ds muss bei der Bestimmung von $\sin\tau$ und $\cos\tau$ (s. 1.) mit dem Zeichen genommen werden, das dem für $tg\,\tau$ entspricht.

Die Tangente und Normale in Punkt P schneiden die Xaxe in T, bezw. in U, dann ist:

$$\text{Tangente PT} = \frac{y}{y'} \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\text{Subtangente} = \frac{y}{y'}$$

$$\text{Normale PU} = y\sqrt{1 + y'^2}$$

$$\text{Subnormale} = y y'.$$

5. Gleichung der

Tangente im Punkt (x, y), (ξ, η) die laufenden Koordinaten der Tangente,

$$\eta - y = y'(\xi - x), \text{ oder } \frac{\delta F}{\delta x}(\xi - x) + \frac{\delta F}{\delta y}(\eta - y) = 0.$$

Normale

$$\eta - y = -\frac{1}{y'}(\xi - x), \text{oder } \frac{\delta F}{\delta y}(\xi - x) - \frac{\delta F}{\delta x}(\eta - y) = 0.$$

Asymptote

$y = mx + b$, wobei

$$m = \lim \frac{y}{x}\Big|_{x=\infty} = \lim \frac{dy}{dx}\Big|_{x=\infty} = \lim y'\Big|_{x=\infty}$$

$$b = \lim (y - x y')_{x=\infty}.$$

6. Berührung von Kurven. Zwei Kurven $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ haben in einem bestimmten, gemeinschaftlichen Punkte eine Berührung nter Ordnung,

wenn sie in diesem Punkte $n+1$ zusammenfallende (unendlich nahe) Punkte gemeinschaftlich haben, dies ist der Fall, wenn für denselben alle Ableitungen von $f(x)$ und $\varphi(x)$ bis zur nten einschl. einander gleich sind. Eine Gerade bildet mit einer Kurve $y=f(x)$ eine Berührung nter Ordnung, wenn für den gemeinschaftlichen Punkt alle Ableitungen von $f''(x)$ bis zur nten verschwinden und $f'(x)=\varphi'(x)$ (Wendepunkt, wenn n gerade, Flachpunkt, wenn n ungerade ist). Das Berühren ist mit oder ohne Schneiden im Berührungspunkt verbunden, je nachdem die Berührung von gerader oder ungerader Ordnung ist.

7. Krümmungskreis. Er ist derjenige Kreis, der mit einer Kurve drei unendlich nahe Punkte gemeinschaftlich, also eine Berührung zweiter Ordnung im Punkt (x, y) hat, der Mittelpunkt desselben, der Krümmungsmittelpunkt ist der Schnittpunkt zweier unendlicher naher (zusammenfallender) Normalen. Der Krümmungshalbmesser ϱ und die Kordinaten (ξ, η) des Krümmungsmittelpunktes sind bestimmt durch die drei Gleichungen

1. $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=\varrho^2$
2. $(x-\xi)+(y-\eta)\cdot y'=0$
3. $1+y'^2+(y-\eta)y''=0$, hieraus ergiebt sich

Krümmungshalbmesser $\varrho=\pm(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}:y''$

($\pm$ je nachdem $y'' \gtrless 0$)

$$\begin{cases} \xi=x-(1+y'^2)\cdot y':y'' \\ \eta=y+(1+y'^2):y'' \end{cases}$$

Ist die Kurve gegeben durch die Gleichungen $x=\varphi(t)$ und $y=\psi(t)$, so ist

$$\varrho=(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}:(x'y''-x''y')$$

$$\begin{cases} \xi=x-y'(x'^2+y'^2):(x'y''-x''y') \\ \eta=y+x'(x'^2+y'^2):(x'y''-x''y'). \end{cases}$$

8. Die Evolute einer Kurve ist der geometrische Ort des Krümmungsmittelpunktes. Ihre Gleichung wird erhalten, indem man aus den Gleichungen für ξ und η in Nr. 7 unter Benützung der Kurvengleichung x und y eliminiert. Die gegebene Kurve heisst Evolvente. Jeder Krümmungshalbmesser ist Normale zur Evolvente, Tangente an die Evolute. Differenz zweier Krümmungshalbmesser gleich dem dazwischen liegenden Bogen der Evolute. Wird ein um die Evolute gelegter, biegsamer und unausdehnbarer Faden in straffer Spannung abgelöst, so beschreibt der Anfangspunkt des Fadens die Evolvente.

9. Hüllkurven. Die Gleichung $F(x, y, p) = 0$, worin p ein veränderlicher Parameter ist, stellt eine Kurvenschar dar, welche eine Kurve umhüllt; die Gleichung der umhüllten Kurve ergiebt sich durch Elimination von p aus den Gleichungen

$$1.\quad F(x, y, p) = 0 \text{ und}$$

$$2.\quad \frac{\delta F}{\delta p} = 0.$$

10. Flächeninhalt (Quadratur). Der Inhalt der Fläche, welche zwischen der Kurve, der Xaxe und den zu den Abscissen x_0 und x_1 gehörigen Ordinaten eingeschlossen ist, ergiebt sich aus

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

Simpsonsche Regel. Ist f(x) höchstens vom 3. Grade, y_m die Ordinate in der Mitte zwischen x_0 und x_1 dann ist

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{1}{6}(x_1 - x_0)(y_0 + 4y_m + y_1).$$

(s. auch § 101_5).

Kurvenlänge (Rektifikation). Die Länge s eines

Kurventeils, welcher zwischen den Abscissen x_0 und x_1 liegt, ist

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{dx^2+dy^2} = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

11. Polarkoordinaten. Gleichung der Kurve:

$$F(r,\varphi)=0 \text{ oder } r=f(\varphi).$$

Winkel ψ der Tangente (Richtung im Sinn des wachsenden φ) mit dem Strahl r:

$$\sin\psi=\frac{r\,d\varphi}{ds}=\frac{r}{s'},\ \cos\psi=\frac{dr}{ds}=\frac{r'}{s'},\ \operatorname{tg}\psi=\frac{r\,d\varphi}{dr}=\frac{r}{r'}.$$

Bogenelement:

$$ds=\pm\sqrt{dr^2+r^2\,d\varphi^2}=\pm\sqrt{r'^2+r^2}\,d\varphi.$$

(ds ist bei der Bestimmung von $\sin\psi$ und $\cos\psi$ mit dem $\operatorname{tg}\psi$ entsprechenden Vorzeichen zu nehmen.)

Krümmungshalbmesser:

$$\varrho=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2-r\,r''+2r'^2}.$$

Fläche zwischen der Kurve und den zu φ_0 und φ_1 gehörigen Strahlen

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2\,d\varphi.$$

Kurvenlänge:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{r'^2+r^2}\,.\,d\varphi=\int_{r_0}^{r_1}\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}\,.\,dr.$$

§ 103. Raumkurven (doppelt gekrümmte Kurven).

1. Eine Raumkurve ist gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{cases} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ z=\chi(t)\end{cases} \text{ oder } \begin{cases} f(x,y,z)=0\\ F(x,y,z)=0.\end{cases} \text{ (Schnittlinie der Flächen.)}$$

$$\text{oder } \begin{cases} y=\varphi_1(x)\\ z=\varphi_2(x).\end{cases} \text{ (Projektionen der Kurve.)}$$

2. Bogenelement

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,.\,dx.$$

3. Gleichungen der Tangente im Punkt (x, y, z)

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}, \text{ oder}$$

$$\frac{\xi - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{\eta - \psi(t)}{\psi'(t)} = \frac{\zeta - \chi(t)}{\chi'(t)}, \text{ oder}$$

$$\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta x}(\xi - x) + \frac{\delta f}{\delta y}(\eta - y) + \frac{\delta f}{\delta z}(\zeta - z) = 0, \\ \frac{\delta F}{\delta x}(\xi - x) + \frac{\delta F}{\delta y}(\eta - y) + \frac{\delta F}{\delta z}(\zeta - z) = 0. \end{cases}$$

Winkel α, β, γ der Tangente mit den Axen bestimmt durch

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

4. Gleichung der Normalebene im Punkt(x, y, z)

$$(\xi - x)\,dx + (\eta - y)\,dy + (\zeta - z)\,dz = 0, \text{ oder}$$

$$[\xi - \varphi(t)]\,\varphi'(t) + [\eta - \psi(t)]\,\psi'(t) + [\zeta - \chi(t)]\,\chi'(t) = 0.$$

5. Gleichung der Schmiegungsebene (= Krümmungsebene = Oskulationsebene = Ebene durch Punkt (x, y, z) und zwei unendlich nahe Punkte)

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0, \text{ wobei}$$

$$A = dy\,d^2z - d^2y\,dz,\ B = dz\,d^2x - d^2z\,dx,\ C = dx\,d^2y - d^2x\,dy.$$

Normale zur Schmiegungsebene:

$$\frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C}.$$

Die Winkel λ, μ, ν dieser Normalen mit den Axen sind bestimmt durch

$$\cos\lambda = \frac{A}{D}, \quad \cos\mu = \frac{B}{D}, \quad \cos\nu = \frac{C}{D}, \text{ wobei}$$

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Die Hauptnormale ist die Schnittlinie der Normalebene mit der Schmiegungsebene; die Gleichungen der Hauptnormalen sind:

$$\frac{\xi - x}{d\frac{dx}{ds}} = \frac{\eta - y}{d\frac{dy}{ds}} = \frac{\zeta - z}{d\frac{dz}{ds}}.$$

6. Kontingenzwinkel $d\tau$, d. h. Winkel zwischen zwei unendlich nahen Tangenten

$$d\tau = \frac{D}{ds^2}.$$

Erster Krümmungshalbmesser

$$\varrho_1 = \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds^3}{D}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt liegt in der Schmiegungsebene, auf der Hauptnormalen und kann als Schnitt der Hauptnormalen mit einer unendlich nahen Normalebene betrachtet werden.

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$\xi = x + \varrho_1{}^2 \frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \eta = y + \varrho_1{}^2 \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \zeta = z + \varrho_1{}^2 \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Unter der (ersten) Krümmung versteht man

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\varrho_1}.$$

7. Torsionswinkel $d\vartheta$, d. h. Winkel zweier unendlich naher Schmiegungsebenen

$$d\vartheta = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}.$$

Zweite Krümmung oder Drehung der Kurve

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\varrho_2}.$$

Zweiter Krümmungshalbmesser (Halbm. der Drehung)

$$\varrho_2 = \frac{ds}{d\vartheta}.$$

§ 104. Krumme Flächen.

1. Eine Fläche ist gegeben durch die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0, \text{ oder entwickelt}$$
$$z = f(x, y).$$

Bezeichnungen:

$$\frac{\delta z}{\delta x} = p, \quad \frac{\delta z}{\delta y} = q; \quad \frac{\delta^2 z}{\delta x^2} = r, \quad \frac{\delta^2 z}{\delta x\, \delta y} = s, \quad \frac{\delta^2 z}{\delta y^2} = t.$$

2. Gleichung der Berührungsebene im Punkt (x, y, z)

$$(\xi - x)\frac{\delta F}{\delta x} + (\eta - y)\frac{\delta F}{\delta y} + (\zeta - z)\frac{\delta F}{\delta z} = 0, \text{ oder}$$
$$p(\xi - x) + q(\eta - y) - (\zeta - z) = 0.$$

3. Gleichungen der Normalen im Punkt (x, y, z)

$$\frac{\xi - x}{\frac{\delta F}{\delta x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\delta F}{\delta y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\delta F}{\delta z}} \text{ oder}$$

$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = -(\zeta - z).$$

Winkel λ, μ, ν der Normalen mit den Axen bestimmt durch

$$\cos\lambda = \frac{\frac{\delta F}{\delta x}}{N}, \quad \cos\mu = \frac{\frac{\delta F}{\delta y}}{N}, \quad \cos\nu = \frac{\frac{\delta F}{\delta z}}{N}, \text{ bezw.}$$

$$\cos\lambda = \frac{p}{n}, \quad \cos\mu = \frac{q}{n}, \quad \cos\nu = -\frac{1}{n}, \text{ wobei}$$

$$N^2 = \left(\frac{\delta F}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta F}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta F}{\delta z}\right)^2 \text{ und}$$
$$n^2 = p^2 + q^2 + 1.$$

4. Die Schnittlinie irgend einer durch die Normale gehenden Ebene mit der Fläche heisst Normalschnitt. Es sei ϱ der Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes im Punkt P, α, β, γ die Winkel, welche die Tangente des Normalschnittes in P mit den Axen bildet, dann ist

$$\varrho = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\cos^2\alpha + 2\,s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}.$$

Satz von Meunier. Geht eine Ebene durch die Tangente eines Normalschnittes (im Fusspunkt P der Normalen), so ist der Krümmungshalbmesser ϱ' dieses schiefen Schnittes im Punkt P

$$\varrho' = \varrho\cos(\varrho\,\varrho') \text{ oder}$$

der Krümmungshalbmesser des schiefen Schnittes wird erhalten, indem man den Krümmungshalbmesser des Normalschnittes auf die Ebene des ersteren projiziert.

5. Die beiden (aufeinander senkrechten) Ebenen, für welche ϱ einen grössten und einen kleinsten Wert erreicht, heissen Hauptnormalschnitte, die Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 derselben bestimmen sich aus den Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \varrho_1 + \varrho_2 &= \frac{(1+q^2)\,r - 2\,p\,q\,s + (1+p^2)\,t}{r\,t - s^2}\,.\,n \\ \varrho_1\,\varrho_2 &= \frac{n^4}{rt - s^2}, \text{ oder als Wurzeln der Gleichung} \end{aligned}\right.$$

$$(r\,t - s^2)\,\varrho^2 - \left[(1+q^2)\,r - 2\,p\,q\,s + (1+p^2)\,t\right] n\,\varrho + n^4 = 0.$$

6. Satz von Euler. Für irgend einen Normalschnitt, dessen Ebene mit der Ebene des zu ϱ_1 gehörigen Hauptnormalschnittes den Winkel φ bildet, ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_2}.$$

Der Ausdruck $\dfrac{1}{\varrho_1\,\varrho_2}$

heisst das Mass der Krümmung für den betreffenden Punkt.

7. Sind ϱ' und ϱ'' die Krümmungshalbmesser zweier auf einander senkrechten Normalschnitte, so ist

$$\frac{1}{\varrho'}+\frac{1}{\varrho''}=\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}$$

d. h. für denselben Punkt einer Fläche ist die Summe der Krümmungen konstant.

8. Krümmungslinie heisst der Ort des Punktes einer Fläche, für welchen die unendlich nahen Normalen zur Fläche sich schneiden; die Normalen gehören daher einer abwickelbaren Fläche an. Durch jeden Punkt einer Oberfläche gehen zwei Krümmungslinien, die auf einander senkrecht sind und die Tangenten der Hauptnormalschnitte berühren. Sie sind dargestellt durch die Gleichung

$$\left[1+q^2)s-pqt\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left[(1+q^2)r-(1+p^2)t\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)+$$
$$\left[pqr-(1+p^2)s\right]=0$$

und durch die Gleichung der Fläche.

9. Eine auf einer Fläche liegende Linie heisst geodätische Linie, wenn ihre Schmiegungsebenen zugleich Normalebenen zur Fläche sind. Ihre Gleichungen sind

$$\frac{\frac{\delta F}{\delta x}}{d\cos\alpha}=\frac{\frac{\delta F}{\delta y}}{d\cos\beta}=\frac{\frac{\delta F}{\delta z}}{d\cos\gamma}$$

Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf einer Fläche gehört einer geodätischen Linie an.

10. Hüllfläche. Die Gleichung

$$F(x, y, z, p)=0,$$

worin p ein veränderlicher Parameter ist, stellt eine Flächenschar dar, welche eine Fläche umhüllt. Die

Gleichung der Hüllfläche ergiebt sich durch Elimination von p aus

$$\begin{cases} F(x, y, z, p) = 0 \text{ und} \\ \dfrac{\delta F(x, y, z, p)}{\delta p} = 0 \end{cases}$$

11. Quadratur (Komplanation) der Flächen.

Das Differential der Fläche ist

$$dF = \sqrt{1 + p^2 + q^2} . dx dy$$

$$\text{daher} \quad F = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dy,$$

y_0 und y_1 sind die der Abscisse x entsprechenden Ordinaten der Projektion des Umrisses der Fläche auf die XYebene, x_0 und x_1 sind die Abscissen zu den Ordinaten, welche jene Projektion begrenzen.

Bei Drehflächen ergiebt sich (—Xaxe ist Drehaxe—):

$$F = 2\pi \int y \sqrt{1 + y'^2}\, dx = 2\pi \int y\, ds$$

Bei Polarkoordinaten hat man:

$$F = \iint \sqrt{\left(r^2 + \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \cos^2\varphi + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)} . r\, d\varphi\, d\psi$$

(s. § 86,3)

12. Kubatur.

1. Bei Drehflächen (—0x Drehaxe—); die gedrehte Fläche ist begrenzt vom gedrehten Kurvenbogen, den zu den den Endpunkten desselben gehörigen Ordinaten und der Xaxe.

$$V = \pi \int y^2\, dx$$

2. Die gedrehte Fläche ist begrenzt von zwei

Ordinaten und zwei Kurven $y = f(x)$ und $y_1 = f_1(x)$,

$$V = \pi \int (y^2 - y_1^{\,2})\, dx$$

3. Es sei u der Inhalt eines parallel zur Ebene YOZ geführten Schnittes, dann ist der Inhalt des Körpers, der zwischen zwei parallel zu YOZ geführten Schnitten mit den Abscissen x_0 und x_1 liegt,

$$V = \int_{x_0}^{x_1} u\, dx \qquad \text{(u abhängig von x)}$$

4. Allgemeine Formel:

$$V = \iiint dx\, dy\, dz.$$

5. Für Polarkoordinaten (Bezeichn. s. § 86_3) ergiebt sich

$$V = \frac{1}{3} \iint r^3 \cos\varphi\, d\varphi\, d\psi.$$

§ 105. Viel gebrauchte Zahlenwerte.

Zahlenwert	Logarithmus	Zahlenwert	Logarithmus
$\sqrt{2} = 1{,}4142$	0,15 052	$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599$	0,10 034
$\sqrt{3} = 1{,}73205$	0,23 856	$\sqrt[3]{3} = 1{,}4422$	0,15 903
$\sqrt{5} = 2{,}2361$	0,34 948	$\sqrt[3]{5} = 1{,}7100$	0,23 300
$\sqrt{6} = 2{,}4495$	0,38 908	$\sqrt[3]{6} = 1{,}8171$	0,25 937
$\sqrt{10} = 3{,}16225$	0,50 000	$\sqrt[3]{10} = 2{,}1544$	0,33 333

Zahlenwert	Logarithmus	Zahlenwert	Logarithmus
$\pi = 3{,}1416$	0,49 715	$\pi^2 = 9{,}8696$	0,99 430
$2\pi = 6{,}2832$	0,79 818	$\sqrt{\pi} = 1{,}7725$	0,24 857
$4\pi = 12{,}5664$	1,09 921	$\sqrt[3]{\pi} = 1{,}4646$	0,16 572
$\frac{\pi}{2} = 1{,}5708$	0,19 612	$\frac{1}{\pi} = 0{,}31831$	0,50 285—1
$\frac{\pi}{3} = 1{,}0472$	0,02 003	$\frac{1}{\pi^2} = 0{,}10132$	0,00 570—1
$\frac{\pi}{4} = 0{,}7854$	0,89 509—1	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}56419$	0,75 143—1
$\frac{\pi}{6} = 0{,}5236$	0,71 900—1	$\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} = 0{,}68278$	0,83 428—1
$\frac{4}{3}\pi = 4{,}1888$	0,62 209	$\frac{180}{\pi} = 57{,}29578$	1,75 812
$g = 9{,}81$	0,99 167	$e = 2{,}7183$	0,43 429
$\frac{g}{2} = 4{,}905$	0,69 064	$e^2 = 7{,}3891$	0,86 859
$\frac{1}{g} = 0{,}1019$	0,00 833—1	$e^3 = 20{,}086$	1,30 288
$\sqrt{g} = 3{,}1321$	0,49 583	$\sqrt{e} = 1{,}6487$	0,21 715
$\frac{\pi}{\sqrt{g}} = 1{,}0030$	0,00 132	$\sqrt[3]{e} = 1{,}3956$	0,14 476