Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 30. Gleichungen ersten Grades.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

10. $e^{\varphi} = e^{\varphi + 2k\pi i}$; $e^{2k\pi i} = 1$, $e^{(2k+1)\pi i} = -1$

11. Ist $y = e^x = e^{x + 2k\pi i}$, so ist

$$ly = x + 2k\pi i.$$

$$l(-1) = (2k+1)\pi i; \quad l(-y) = ly + (2k+1)\pi i.$$

Ist $y + iz = re^{\varphi i}$, so ist

$$l(y + iz) = lr + (\varphi + 2k\pi) i.$$

12. $$\begin{cases} \operatorname{arc\,sin} x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \\ \qquad \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots \\ \operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad 1 \geqq x \geqq -1 \\ \hfill \text{(Leibnizsche} \\ \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \quad \text{Reihe.)} \end{cases}$$

Zur Berechnung von π kann folgende Formel benützt werden:

$$\begin{cases} \pi = 6 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{12} \left\{ 1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \ldots \right\} \\ \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} \\ \qquad + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8} \\ \frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7}. \end{cases}$$

III. Abschnitt.

Gleichungen.

§. 30. Gleichungen ersten Grades.

a) Umformungs- und Versetzungsregeln:

1. Jede Gleichung bleibt richtig, wenn auf jeder Seite dieselbe Operation mit derselben Zahl vorgenommen wird.

2. Ein freier Summand der einen Seite kann auf die andere Seite als Subtrahend gesetzt werden und umgekehrt.

3. Eine Zahl, welche Faktor der gesamten einen Seite ist, kann auf die andere Seite als Divisor derselben gesetzt werden und umgekehrt.

4. Eine Zahl, welche Potenzexponent der gesamten einen Seite ist, kann auf die andere Seite als Wurzelexponent derselben gesetzt werden und umgekehrt.

b) Gleichungen mit einer Unbekannten.

5. Aus $\begin{cases} x + a = b & \text{folgt } x = b - a \\ x - a = b & \text{„} \quad x = b + a. \end{cases}$

$$\begin{cases} ax = b & \text{„} \quad x = \frac{b}{a} \\ \frac{x}{a} = b & \text{„} \quad x = ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^n = a & \text{„} \quad x = \sqrt[n]{a} \\ \sqrt[n]{x} = a & \text{„} \quad x = a^n. \end{cases}$$

6. Aus $\begin{cases} ax = 0 \text{ folgt } x = 0 \\ a(x - b) = 0 \text{ folgt } x - b = 0 \\ (x - a)(x - b) = 0 \text{ folgt } x - a = 0 \text{ u. } x - b = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} ax + bx = cx \text{ folgt } x = 0 \\ a(x - b) + c(x - b) = d(x - b) \text{ folgt } x - b = 0. \end{cases}$$

Ist die linke Seite einer auf null gebrachten Gleichung ein Produkt, das x oder Ausdrücke in x als Faktoren enthält, so ist jeder dieser Faktoren gleich null zu setzen.

Kann eine Gleichung mit x oder einem Ausdruck, der x enthält, durchdividiert werden, so ist x, bezw. dieser Ausdruck, gleich null zu setzen.

c) Gleichungen mit zwei und mehr Unbekannten.

7. Aus $\begin{cases} ax + by = c \\ a_1 x + b_1 y = c_1, \end{cases}$ folgt

$$y = \frac{c - ax}{b},$$

$$y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}, \text{ daher}$$

I. $$\frac{c - ax}{b} = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}$$ (Gleichsetzungsmethode),

II. $$ax + b \cdot \frac{c_1 - a_1 x}{b_1} = c$$ (Einsetzungsmethode),

III. $$\begin{array}{r} a b_1 x + b b_1 y = c b_1 \\ a_1 b x + b b_1 y = c_1 b \\ \hline x(a b_1 - a_1 b) = c b_1 - c_1 b \end{array}$$

$$x = \frac{c b_1 - c_1 b}{a b_1 - a_1 b}$$

(Kombinationsmethode),

IV. $$\begin{array}{rl|l} 1) & a x + b y = c & m \\ 2) & a_1 x + b_1 y = c_1 & \\ \hline 3) & (am + a_1)x + (bm + b_1)y = cm + c_1, & \end{array}$$

setze $bm + b_1 = 0$, so ist $m = -\frac{b_1}{b}$,

dies in 3) eingesetzt giebt

$$\left(-\frac{a b_1}{b} + a_1\right)x = -\frac{c b_1}{b} + c_1, \text{ oder}$$

$$(-a b_1 + a_1 b)x = -c b_1 + c_1 b$$

$$x = \frac{c b_1 - c_1 b}{a b_1 - a_1 b};$$

ebenso wird y bestimmt.

(Methode der unbest. Koëfficienten von Bézout.)

8. Hat man drei Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$\left| \begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{array} \right|$$

so stellt man durch zweimalige Elimination derselben Unbekannten, z. B. von z, zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten und dann hieraus eine Gleichung mit einer Unbekannten her. — Bei vier Gleichungen mit vier Unbekannten eliminiert man dieselbe Unbekannte dreimal und erhält dadurch drei Gleichungen mit drei Unbekannten u. s. f.

9. Lösung durch Determinanten:

$$\begin{array}{l|l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & A_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & A_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & A_3 \\ \hline \end{array}$$

Durch Multiplikation mit den angeschriebenen Unterdeterminanten und Addition folgt:

$$(a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3)\, x = d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3, \text{ also}$$

$$x = \frac{d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3}{a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3}.$$

Der Nenner ist die Determinante $\varDelta$ des Systems der linken Seiten. — Für y und z folgt ebenso:

$$y = \frac{d_1 B_1 + d_2 B_2 + d_3 B_3}{\varDelta}$$

$$z = \frac{d_1 C_1 + d_2 C_2 + d_3 C_3}{\varDelta}.$$

10. Die Bedingung für das gleichzeitige Bestehen von n homogenen Gleichungen, z. B. von

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{array} \text{ ist } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$