Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 31. Gleichungen zweiten Grades; Exponentialgleichungen.

§ 31. Gleichungen zweiten Grades und Exponentialgleichungen.

a) Mit einer Unbekannten.

1. $x^2 = a$

$x = \pm\sqrt{a}$

2. $\underline{\mathbf{x^2 + bx + c = 0}}$ (1. Normalform.)

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = -c + \frac{b^2}{4}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

3. $\underline{\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}}$ (2. Normalform.)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Die Gleichung liefert:

$$\left.\begin{array}{l} \text{2 verschiedene reelle Werte} \\ \text{2 gleiche \quad „ \quad „} \\ \text{2 verschiedene imag. \quad „} \end{array}\right\} \text{je nachdem } b^2 - 4ac \gtreqless 0.$$

$b^2 - 4ac$ heisst Diskriminante der Gleichung.

4. $\underline{\mathbf{(x - \alpha)(x - \beta) = 0}}$ (3. Normalform.)

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta. \end{cases}$$

$$\text{Aus } \begin{cases} x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \\ x^2 + \quad bx \quad + c = 0 \end{cases} \text{ folgt } \begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c. \end{cases}$$

5. Die Gleichung

$$x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a} \text{ hat die Wurzeln } x_1 = a,\ x_2 = \frac{1}{a}$$

$$x - \frac{1}{x} = a - \frac{1}{a} \quad „ \quad „ \quad „ \quad x_1 = a,\ x_2 = -\frac{1}{a}.$$

6. Gleichungen, die durch Einführung einer neuen Unbekannten oder durch Zerlegung auf quadratische zurückgeführt werden können:

1. $ax^4 + bx^2 + c = 0$, setze $x^2 = y$
2. $ax^6 + bx^3 + c = 0$, „ $x^3 = y$
3. $ax^{2m} + bx^m + c = 0$, „ $x^m = y$
4. $ax + b\sqrt{x} + c = 0$, „ $\sqrt{x} = y$
5. $a\sqrt[3]{x^8} + b\sqrt[3]{x^4} + c = 0$, „ $\sqrt[3]{x^4} = y$
6. $au^{2x} + bu^x + c = 0$, „ $u^x = y$ (§ 31c.)
7. $(x^2 + ax)^2 + b(x^2 + ax) + c = 0$, „ $x^2 + ax = y$
8. $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^2 + \frac{ax+b}{cx+d} + e = 0$, „ $\frac{ax+b}{cx+d} = y$.

7. Symmetrische Gleichungen:

1. $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$, $a(x^3+1) + bx(x+1) = 0$, zerfällt in I. $x + 1 = 0$ und II. $a(x^2 - x + 1) + bx = 0$.
2. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, Division mit x^2,
$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0;$$
setze $x + \frac{1}{x} = y$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$.
3. $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$,
$$a(x^5 + 1) + bx(x^3 + 1) + cx^2(x + 1) = 0$$

Abspaltung von $x + 1 = 0$, Restgleichung symmetrisch vom vierten Grad.

b) Mit zwei Unbekannten.

Für die Auflösung quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten kann keine allgemeine, einfache Methode angegeben werden, da die Elimination einer der Unbekannten im allgemeinen auf eine Gleichung vierten Grades führt. Es ergiebt sich jedoch in vielen Fällen, in welchen die eine der Gleichungen oder beide nicht alle möglichen Glieder enthalten, die Schlussgleichung als quadratische oder sonst lösbare. In jedem einzelnen Fall ist nach Massgabe der Eigenschaften der vorliegenden Gleichungen zu verfahren. Die wichtigsten Fälle sind:

1. Die eine der beiden Gleichungen ist vom ersten Grad; man drücke eine Unbekannte aus und setze sie in die andere Gleichung ein.

2. Durch Elimination der quadratischen Glieder entsteht eine Gleichung ersten Grades.

3. Es lässt sich eine Vereinfachung durch Absonderung eines Faktors erzielen.

4. Die Einführung einer neuen Unbekannten in die eine Gleichung bewirkt, dass dieselbe nur noch diese Unbekannte enthält, oder es wird das ganze System durch Einführung neuer Unbekannten vereinfacht.

5. Durch Addition und Subtraktion, Multiplikation oder Division der beiden gegebenen Gleichungen, oder auch durch korrespondierende Addition und Subtraktion bei einer derselben, entsteht eine Gleichung, in der für $x + y$, $x - y$, xy oder $\frac{x}{y}$ oder einen sonstigen Ausdruck in x und y eine neue Unbekannte eingeführt werden kann.

6. Die Gleichung ist homogen; man dividiert mit y^2 durch und bestimmt $\frac{x}{y}$.

7. Es kommen ausser dem Absolutglied in jeder Gleichung nur quadratische Glieder vor; man eliminiert die Absolutglieder, so erhält man ein homogene Gleichung. Oder: Man bringt die quadratischen Glieder nach links, dividiert die eine Gleichung durch die andere, dividiert dann Zähler und Nenner durch y^2, setzt $\frac{x}{y} = t$ und bestimmt t.

8. Man kann z. B. aus $x^2 + y^2 = a$
$2xy = b$

durch Addition und Subtraktion der zweiten $(x+y)^2$ und $(x-y)^2$ bilden und hieraus $x+y$ und $x-y$ bestimmen.

c) Exponentialgleichungen (logarithmische Gleichungen).

1. Grundaufgabe:

$$a^x = b;$$

$$x \log a = \log b, \quad x = \frac{\log b}{\log a}.$$

2. Besondere Fälle:

1. $a^x = a^r; \quad x = r.$
2. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \left(\frac{b}{a}\right)^m; \quad x = -m.$
3. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{c}{d}; \quad x = \frac{\log c - \log d}{\log a - \log b}.$
4. $(ab)^{\frac{m+x}{nx}} = a \cdot b^{\frac{n+x}{r+x}}.$
   Logarithmiere, sammle die Glieder mit x nach links, die ohne x nach rechts, und löse nach x auf.
5. $ab^x + c(d + b^{-x}) = e$; setze und bestimme zunächst $y = b^x$.
6. $a^{x+p} + a^{x+q} = b^{x+m} + b^{x+n};$
   $$a^x(a^p + a^q) = b^x(b^m + b^n)$$
   $$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{b^m + b^n}{a^p + a^q};$$ hieraus folgt x.
7. $x^r x^{\log x} = b;$
   $r \log x + \log x \cdot \log x = \log b$, setze und bestimme $y = \log x$ u. s. f.
8. $\log(ax+b) + \log(cx+d) = m;$
   es ist $\log\big((ax+b)(cx+d)\big) = m$, also
   $$(ax+b)(cx+d) = 10^m$$
   woraus x folgt.

9. $a^x b^y = p$
$c^x d^y = q$;
logarithmiere und bestimme aus den erhaltenen Gleichungen log x und log y.

§ 32. Diophantische Gleichungen ersten Grades.

a) Mit zwei Unbekannten.

1. Euler'sche Methode. (Absonderung der grössten Ganzen.) Beispiel:

$$61x + 7y = 1000$$

$$y = \frac{1000 - 61x}{7} = 143 - 9x + \frac{2x - 1}{7} \ (= u)$$

$$x = \frac{7u + 1}{2} = 3u + \frac{u + 1}{2} \ (= v)$$

$u = 2v - 1$, also

$$x = \frac{14v - 7 + 1}{2} = 7v - 3$$

$$y = \frac{1000 - 61(7v - 3)}{7} = 169 - 61v.$$

v	x	y
0	−3	169
1	4	108
2	11	47
3	18	−14

$\begin{cases} 4 \\ 108 \end{cases} \begin{cases} 11 \\ 47 \end{cases}$ sind also die brauchbaren Werte für die Unbekannten.

2. Kettenbruchmethode von Lagrange:
Ist 1. $ax + by = c$ gegeben, so setze man
2. $a_1 x + b_1 y = t$. dann folgt:

3. $$x = \frac{b_1 c - bt}{ab_1 - a_1 b},$$

$$y = \frac{at - a_1 c}{ab_1 - a_1 b},$$