Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 32. Diophantische Gleichungen.

9. $a^x b^y = p$
$c^x d^y = q$;
logarithmiere und bestimme aus den erhaltenen Gleichungen $\log x$ und $\log y$.

§ 32. Diophantische Gleichungen ersten Grades.

a) Mit zwei Unbekannten.

1. Euler'sche Methode. (Absonderung der grössten Ganzen.) Beispiel:

$$61x + 7y = 1000$$

$$y = \frac{1000 - 61x}{7} = 143 - 9x + \frac{2x - 1}{7} (= u)$$

$$x = \frac{7u + 1}{2} = 3u + \frac{u + 1}{2} (= v)$$

$u = 2v - 1$, also

$$x = \frac{14v - 7 + 1}{2} = 7v - 3$$

$$y = \frac{1000 - 61(7v - 3)}{7} = 169 - 61v.$$

v	x	y
0	−3	169
1	4	108
2	11	47
3	18	−14

$\begin{cases} 4 \\ 108 \end{cases} \begin{cases} 11 \\ 47 \end{cases}$ sind also die brauchbaren Werte für die Unbekannten.

2. Kettenbruchmethode von Lagrange:

Ist 1. $a x + b y = c$ gegeben, so setze man
2. $a_1 x + b_1 y = t$. dann folgt:

3. $$x = \frac{b_1 c - b t}{a b_1 - a_1 b},$$

$$y = \frac{a t - a_1 c}{a b_1 - a_1 b},$$

x und y sind dann ganze Zahlen, wenn $a b_1 - a_1 b = \pm 1$. Dies ist der Fall, wenn $\frac{a_1}{b_1}$ vorletzter Näherungswert des in einen Kettenbruch verwandelten Bruches $\frac{a}{b}$ ist (s. § 17_4).

Beispiel: 1. $61x + 7y = 1000$

Näherungswerte des in einen Kettenbruch verwandelten Bruches $\frac{7}{61}$ sind: $\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{3}{26}, \frac{7}{61}$, also

2. $26x + 3y = t$

3. $x = 3000 - 7t = 7(429 - t) - 3$
$= \mathbf{7v - 3}$

4. $y = \frac{t - 26x}{3} = \frac{429 - v - 182v + 78}{3}$
$= \mathbf{169 - 61v}$.

v	0	1	2	3
x	−3	4	11	18
y	169	108	47	−14

Res.: $\begin{cases} 4 \\ 108 \end{cases}$, $\begin{cases} 11 \\ 47 \end{cases}$.

b) Mit drei Unbekannten.

3. Man eliminiere aus den zwei gegebenen Gleichungen eine der drei Unbekannten, z. B. z, dann löse man die erhaltene Gleichung nach a) auf und berechne z vermittelst der erhaltenen Werte von x und y aus einer der gegebenen Gleichungen.

§ 33. Allgemeine Sätze über höhere Gleichungen.

1. Hat $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ die Wurzel $x = \alpha$, so ist $f(x)$ durch $x - \alpha$ ohne Rest teilbar.