Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 33. Allgemeine Sätze über höhere Gleichungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

x und y sind dann ganze Zahlen, wenn $a b_1 - a_1 b = \pm 1$. Dies ist der Fall, wenn $\frac{a_1}{b_1}$ vorletzter Näherungswert des in einen Kettenbruch verwandelten Bruches $\frac{a}{b}$ ist (s. § 17₄).

Beispiel: 1. $61x + 7y = 1000$

Näherungswerte des in einen Kettenbruch verwandelten Bruches $\frac{7}{61}$ sind: $\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{3}{26}, \frac{7}{61}$, also

2. $26x + 3y = t$

3. $x = 3000 - 7t = 7(429 - t) - 3$
$= \mathbf{7v - 3}$

4. $y = \frac{t - 26x}{3} = \frac{429 - v - 182v + 78}{3}$
$= \mathbf{169 - 61v}$.

v	0	1	2	3
x	−3	4	11	18
y	169	108	47	−14

Res.: $\begin{cases} 4 \\ 108 \end{cases}$, $\begin{cases} 11 \\ 47 \end{cases}$.

b) Mit drei Unbekannten.

3. Man eliminiere aus den zwei gegebenen Gleichungen eine der drei Unbekannten, z. B. z, dann löse man die erhaltene Gleichung nach a) auf und berechne z vermittelst der erhaltenen Werte von x und y aus einer der gegebenen Gleichungen.

§ 33. Allgemeine Sätze über höhere Gleichungen.

1. Hat $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ die Wurzel $x = \alpha$, so ist $f(x)$ durch $x - \alpha$ ohne Rest teilbar.

2. Eine Gleichung nten Grades hat n, aber auch nur n Wurzeln.

3. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$, so ist

$$\mathbf{f(x)=a_0\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)} \text{ und}$$

4. Symmmetrische Funktionen:

$$\frac{a_1}{a_0} = -\Sigma K_1(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) = -(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n);$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \Sigma K_2(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n;$$

$$\frac{a_3}{a_0} = -\Sigma K_3(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n) = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n.$$

. . . .

$$\frac{a_n}{a_0} = (-1)^n . \alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \ldots \alpha_n.$$

5. Eine Gleichung hat höchstens soviel reelle positive Wurzeln als Zeichenwechsel und höchstens soviel reelle negative Wurzeln als Zeichenfolgen (die fehlenden Glieder sind mit ± 0 zu ergänzen).

6. Ist $p+qi$ eine Wurzel einer Gleichung mit reellen Koeffizienten, so ist auch $p-qi$ eine Wurzel. Die Gleichung hat, wenn sie imaginäre Wurzeln hat, stets eine gerade Anzahl derselben. Eine Gleichung von ungeradem Grad hat daher zum wenigsten eine reelle Wurzel.

7. Wird $f(x)$ für $x=p$ negativ und für $x=q$ positiv, so liegt mindestens eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$ zwischen p und q.

8. Sind die Koeffizienten der r niedersten Potenzen von x (x^0 eingeschlossen) gleich null, so hat die Glei-

chung r mal die Wurzel null; sind die der r höchsten Potenzen 0, so hat sie r mal die Wurzel ∞.

9. Ist α eine Wurzel der Gleichung 1., so ergiebt sich aus derselben durch Division mit $x-\alpha$ die Gleichung $n-1$ ten Grades

$$\frac{f(x)}{x-\alpha}=b_0 x^{n-1}+b_1 x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}=0,$$

dann ist $$b_r=b_{r-1}\cdot\alpha+a_r.$$

Beispiel $3x^5-7x^4+2x^3+4x^2-7x-2=0$ soll durch $x-2$ dividiert werden.

	3	−7	+2	+4	−7	−2
2	3	−1	0	4	+1	0

Res.: $3x^4-x^3+4x+1=0$.

Durch diese Division wird festgestellt, ob $x=2(=\alpha)$ eine Wurzel der ursprünglichen Gleichung ist.

Um die ganzen rationalen Wurzeln einer Gleichung aufzufinden, zerlege man a_n in Faktoren $p_1, p_2\ldots$ und versuche, ob $x-p_1$, $x-p_2\ldots$ ohne Rest in die Gleichung aufgeht. s. auch § $37_{a,\,1}$.

10. Wurzelverkleinerung. Soll die Gleichung

$$f(x)=a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

in die Gleichung

$$\varphi(x)=p_0 x^n+p_1 x^{n-1}+\ldots+p_{n-1}x+p_n=0$$

umgewandelt werden, so dass die Wurzeln der letzteren Gleichung um k kleiner sind als die der gegebenen, so muss $f(x)=\varphi(x-k)$, also

$$a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_n=p_0(x-k)^n+p_1(x-k)^{n-1}$$
$$+\ldots+p_{n-1}(x-k)+p_n$$

sein und es sind daher $p_n, p_{n-1}, \ldots p_0$ die Reste, die sich ergeben, wenn man $f(x)$ fortlaufend mit $x-k$ dividiert.

Beispiel: $x^4 - 4x^3 - 39x^2 + 46x + 80 = 0$

$$\begin{array}{llllll}
4) & 1 & 0 & -39 & -110 & -\mathbf{360} = \mathbf{p_n} \\
4) & 1 & 4 & -23 & -\mathbf{202} = \mathbf{p_{n-1}} & \\
4) & 1 & 8 & +\mathbf{9} = \mathbf{p_{n-2}} & & \\
4) & 1 & \mathbf{12} = \mathbf{p_1} & & & \\
4) & \mathbf{1} = \mathbf{p_0} & & & &
\end{array}$$

die gesuchte Gleichung ist:

$$x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 202x - 360 = 0.$$

11. Wurzelreduktion (= Transformation). Soll die Gleichung $f(x) = 0$ so umgeformt werden, dass das zweite Glied der neuen Gleichung 0 ist, so ist, da $p_1 = a_1 + n k a_0 = 0$,

$$k = -\frac{a_1}{n a_0}.$$

Beispiel: $x^3 - 18x^2 + 105x - 196 = 0$; $k = -\frac{-18}{3} = +6$;

$$\begin{array}{llllll}
6) & 1 & -12 & +33 & +2 & \qquad y = x - 6; \\
6) & 1 & -6 & -3 & & \\
6) & 1 & 0 & & & \qquad \text{Res.: } y^3 - 3y + 2 = 0.
\end{array}$$

§ 34. Binomische Gleichungen.

1. $x^n = +1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$;

$$x = \sqrt[n]{+1} = (+1)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}.$$

wobei k alle ganzen Werte von 0 bis n erhält.

2. $x^n = -1 = \cos(2k+1)\pi + i \sin(2k+1)\pi$;

$$x = \sqrt[n]{-1} = \cos\frac{2k+1}{n}\pi + i \sin\frac{2k+1}{n}\pi.$$

3. Beispiele.

1. $\mathbf{x^3 = 1}$;