Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 34. Binomische Gleichungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

Beispiel: $x^4 - 4x^3 - 39x^2 + 46x + 80 = 0$

$$
\begin{array}{llllll}
4) & 1 & 0 & -39 & -110 & -\mathbf{360} = \mathbf{p_n} \\
4) & 1 & 4 & -23 & -\mathbf{202} = \mathbf{p_{n-1}} & \\
4) & 1 & 8 & +\mathbf{9} = \mathbf{p_{n-2}} & & \\
4) & 1 & \mathbf{12} = \mathbf{p_1} & & & \\
4) & \mathbf{1} = \mathbf{p_0} & & & &
\end{array}
$$

die gesuchte Gleichung ist:

$$x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 202x - 360 = 0.$$

11. Wurzelreduktion (= Transformation). Soll die Gleichung $f(x) = 0$ so umgeformt werden, dass das zweite Glied der neuen Gleichung 0 ist, so ist, da $p_1 = a_1 + n k a_0 = 0$,

$$k = -\frac{a_1}{n a_0}.$$

Beispiel: $x^3 - 18x^2 + 105x - 196 = 0$; $k = -\frac{-18}{3} = +6$;

$$
\begin{array}{lllll}
6) & 1 & -12 & +33 & +2 \\
6) & 1 & -6 & -3 & \\
6) & 1 & 0 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
y = x - 6; \\
\\
\text{Res.: } y^3 - 3y + 2 = 0.
\end{array}
$$

§ 34. Binomische Gleichungen.

1. $x^n = +1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$;

$$x = \sqrt[n]{+1} = (+1)^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}.$$

wobei k alle ganzen Werte von 0 bis n erhält.

2. $x^n = -1 = \cos(2k+1)\pi + i \sin(2k+1)\pi$;

$$x = \sqrt[n]{-1} = \cos \frac{2k+1}{n}\pi + i \sin \frac{2k+1}{n}\pi.$$

3. Beispiele.

1. $\mathbf{x^3 = 1}$;

$$\begin{array}{ll} \text{mit } k=0 \ldots\ldots\ldots & x=1, \\ \text{mit } k=\begin{cases}1\\2\end{cases}\ldots\ldots & x=\cos 120^0 \pm i \sin 120^0 = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \\ & \quad = \begin{cases}\alpha\\ \beta.\end{cases} \end{array}$$

2. $\mathbf{x^3=-1;}$

$$\begin{array}{ll} \text{mit } k=\begin{cases}0\\2\end{cases}\ldots\ldots & x=\cos 60^0 \pm i \sin 60^0 = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \begin{cases}-\beta\\ -\alpha,\end{cases} \\ \text{mit } k=1 \ldots\ldots\ldots & x=-1. \end{array}$$

3. $\mathbf{x^4=1;}$

$$\begin{array}{ll} \text{mit } k=0 \ldots\ldots\ldots & x=1, \\ \text{mit } k=\begin{cases}1\\3\end{cases}\ldots\ldots & x=\cos 90 \pm i \sin 90 = \pm i, \\ \text{mit } k=2 \ldots\ldots\ldots & x=-1. \end{array}$$

4. $\mathbf{x^4=-1;}$

$$\begin{array}{ll} \text{mit } k=\begin{cases}0\\3\end{cases}\ldots\ldots & x=\cos 45^0 \pm i \sin 45^0. \\ \text{mit } k=\begin{cases}1\\2\end{cases}\ldots\ldots & x=\cos 135^0 \pm i \sin 135^0. \end{array}$$

5. $\mathbf{x^5=1;}$

$$\begin{array}{ll} \text{mit } k=0 \ldots\ldots & x=1, \\ \text{mit } k=\begin{cases}1\\4\end{cases}\ldots\ldots & x=\cos 72^0 \pm i \sin 72^0, \\ \text{mit } k=\begin{cases}2\\3\end{cases}\ldots\ldots & x=\cos 144^0 \pm i \sin 144^0. \end{array}$$

6. $\mathbf{x^5=-1;}$

$$\begin{array}{ll} \text{mit } k=\begin{cases}0\\4\end{cases}\ldots\ldots & x=\cos 36^0 \pm i \sin 36^0, \\ \text{mit } k=\begin{cases}1\\3\end{cases}\ldots\ldots & x=\cos 108^0 \pm i \sin 108^0, \\ \text{mit } k=2 \ldots\ldots\ldots & x=-1. \end{array}$$

4. $\mathbf{x^n = a}$ | $x^n = -a$

$$x = \left(\sqrt[n]{a}\right) \cdot \sqrt[n]{+1} \qquad\qquad x = \left(\sqrt[n]{a}\right) \cdot \sqrt[n]{-1}$$

wobei $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ den absoluten, reellen Wert von $\sqrt[n]{a}$ bedeuted, welchen man durch direkte Wurzelausziehung oder logarithmische Berechnung erhält, während $\sqrt[n]{+1}$ und $\sqrt[n]{-1}$ jeden der durch 1. und 2. bestimmten Werte darstellen.

§ 35. Kubische Gleichungen.

1. $\mathbf{x^3 - a = 0}$ | $\mathbf{x^3 + a = 0}$

$$x = \sqrt[3]{a} = \begin{cases} \left(\sqrt[3]{a}\right) \\ \left(\sqrt[3]{a}\right) \cdot \alpha \\ \left(\sqrt[3]{a}\right) \cdot \beta \end{cases} \qquad x = \sqrt[3]{-a} = \begin{cases} -\left(\sqrt[3]{a}\right) \\ -\left(\sqrt[3]{a}\right) \cdot \alpha \\ -\left(\sqrt[3]{a}\right) \cdot \beta \end{cases}$$

s. § 34, $3_{1,2}$.

2. $$x^3 + a x^2 + b x + c = 0$$

Transformiere die Gleichung (durch Wurzelverkleinerung um $\frac{a}{3}$ oder Subtsitution von $y = x - \frac{a}{3}$, s. § 33_{10}) auf die Form

$$\mathbf{y^3 + 3 p y + 2 q = 0}$$

und setze $y = u + v$ und $u^3 + v^3 + 2q = 0$,

dann ist
$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} \\ v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = u + v \\ y_2 = -\dfrac{u+v}{2} + \dfrac{i}{2}\sqrt{3}\,(u - v) \\ y_3 = -\dfrac{u+v}{2} - \dfrac{i}{2}\sqrt{3}\,(u - v) \end{cases}$$

(Cardan'schen Formeln)