# Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

## § 35. Kubische Gleichungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

4. $\mathbf{x^n = a}$ | $x^n = -a$

$$x = \left(\sqrt[n]{a}\right) \cdot \sqrt[n]{+1} \qquad x = \left(\sqrt[n]{a}\right) \cdot \sqrt[n]{-1}$$

wobei $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ den absoluten, reellen Wert von $\sqrt[n]{a}$ bedeuted, welchen man durch direkte Wurzelausziehung oder logarithmische Berechnung erhält, während $\sqrt[n]{+1}$ und $\sqrt[n]{-1}$ jeden der durch 1. und 2. bestimmten Werte darstellen.

## § 35. Kubische Gleichungen.

1. $\mathbf{x^3 - a = 0}$ | $\mathbf{x^3 + a = 0}$

$$x = \sqrt[3]{a} = \begin{cases} \left(\sqrt[3]{a}\right) \\ \left(\sqrt[3]{a}\right) . \alpha \\ \left(\sqrt[3]{a}\right) . \beta \end{cases} \qquad x = \sqrt[3]{-a} = \begin{cases} -\left(\sqrt[3]{a}\right) \\ -\left(\sqrt[3]{a}\right) . \alpha \\ -\left(\sqrt[3]{a}\right) . \beta \end{cases}$$

s. § 34, $3_{1,2}$.

2. $$x^3 + a x^2 + b x + c = 0$$

Transformiere die Gleichung (durch Wurzelverkleinerung um $\frac{a}{3}$ oder Subtsitution von $y = x - \frac{a}{3}$, s. § $33_{10}$) auf die Form

$$\mathbf{y^3 + 3 p y + 2 q = 0}$$

und setze $y = u + v$ und $u^3 + v^3 + 2q = 0$,

dann ist $$\begin{cases} u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} \\ v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = u + v \\ y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\,(u - v) \\ y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\,(u - v) \end{cases}$$ (Cardan'schen Formeln)

Die Cardanschen Formeln führen zu einer Lösung nur so lange $q^2+p^3>0$; sie liefern dann 1 reelle und 2 imaginäre Wurzeln.

3. Fall der 3 reellen Wurzeln (casus irreducibilis). Ist $q^2+p^3<0$, so hat die Gleichung 3 reelle Wurzeln, aber diese können nicht mit den genannten Formeln bestimmt werden; dann

$$\left\{\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{-q}{\sqrt{-p^3}} \\ y_1 &= 2\sqrt{-p}\,.\cos\frac{\varphi}{3} \\ y_2 &= -2\sqrt{-p}\,.\cos\left(\frac{\varphi}{3}+60^0\right) \\ y_3 &= -2\sqrt{-p}\,.\cos\left(\frac{\varphi}{3}-60^0\right). \end{aligned}\right.$$

4. Trigonometrische Auflösung für Fall 2: $q^2+p^3>0$.

1. $p>0$

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{\sqrt{p^3}}{q}\;;\quad \sqrt[3]{\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2}}=\operatorname{tg}\psi \\ y_1 &= \mp 2\sqrt{p}\,.\operatorname{ctg}2\psi \\ y_2 &= \pm\sqrt{p}\left(\operatorname{ctg}2\psi+\frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi}\right) \\ y_3 &= \pm\sqrt{p}\left(\operatorname{ctg}2\psi-\frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi}\right); \end{aligned}\right.$$

hiebei sind die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen, je nachdem $q \gtrless 0$.

2. $p < 0$

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{+q}; \quad \operatorname{tg}\sqrt[3]{\dfrac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg}\psi \\ y_1 = \mp 2\sqrt{-p}\cdot\dfrac{1}{\sin 2\psi} \\ y_2 = \pm\sqrt{-p}\left(\dfrac{1}{\sin 2\psi} + i\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2\psi\right) \\ y_3 = \pm\sqrt{-p}\left(\dfrac{1}{\sin 2\psi} - i\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2\psi\right). \end{cases}$$

Zeichen wie oben bei 1. zu nehmen.

## § 36. Biquadratische Gleichungen.

1. Besondere Fälle s. § 31, $6_1, 7_2$.

2. Methode der Zerlegung. Man reduziere die gegebene Gleichung auf die Form:

$$x^4 + a x^2 + b x + c = 0 \text{ und setze}$$

$$x^4 + a x^2 + b x + c = (x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1);$$

hieraus durch Koeffizientenvergleichung

$$1. \begin{cases} \alpha = -\alpha_1 \\ \beta + \beta_1 - \alpha^2 = a \\ \alpha(\beta_1 - \beta) = b \\ \beta\beta_1 = c \end{cases}$$

Durch Elimination von $\beta$ und $\beta_1$ ergiebt sich:

2. $\alpha^6 + 2a\alpha^4 + (a^2 - 4c)\alpha^2 - b^2 = 0$
3. Transformation und Lösung dieser (nach $\alpha^2$) kubischen Resolvente. (Ein Wert von $\alpha$ genügt; die andern liefern die x nur in anderer Reihenfolge.)
4. Berechnung von $\beta$ und $\beta_1$ aus 1.
5. Lösung der Gleichungen: $\begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta = 0 \\ x^2 - \alpha x + \beta_1 = 0 \end{cases}$