Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 36. Biquadratische Gleichungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

2. $p < 0$

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{(-p)^{\frac{3}{2}}}{+q}; \quad \operatorname{tg}\sqrt[3]{\dfrac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg}\psi \\ y_1 = \mp 2\sqrt{-p}\cdot\dfrac{1}{\sin 2\psi} \\ y_2 = \pm\sqrt{-p}\left(\dfrac{1}{\sin 2\psi} + i\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2\psi\right) \\ y_3 = \pm\sqrt{-p}\left(\dfrac{1}{\sin 2\psi} - i\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2\psi\right). \end{cases}$$

Zeichen wie oben bei 1. zu nehmen.

§ 36. Biquadratische Gleichungen.

1. Besondere Fälle s. § 31, 6_1, 7_2.

2. Methode der Zerlegung. Man reduziere die gegebene Gleichung auf die Form:

$$x^4 + a x^2 + b x + c = 0 \text{ und setze}$$

$$x^4 + a x^2 + b x + c = (x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1);$$

hieraus durch Koeffizientenvergleichung

$$1. \begin{cases} \alpha = -\alpha_1 \\ \beta + \beta_1 - \alpha^2 = a \\ \alpha(\beta_1 - \beta) = b \\ \beta\beta_1 = c \end{cases}$$

Durch Elimination von β und β_1 ergiebt sich:

2. $\alpha^6 + 2a\alpha^4 + (a^2 - 4c)\alpha^2 - b^2 = 0$
3. Transformation und Lösung dieser (nach α^2) kubischen Resolvente. (Ein Wert von α genügt; die andern liefern die x nur in anderer Reihenfolge.)
4. Berechnung von β und β_1 aus 1.
5. Lösung der Gleichungen: $\begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta = 0 \\ x^2 - \alpha x + \beta_1 = 0 \end{cases}$

3. Euler'sche Methode.

1. Transformierung der Gleichung auf die Form

$$x^4 + a x^2 + b x + c = 0$$

2. Bildung der Resolvente

$$y^3 + \frac{a}{2} y^2 + \frac{a^2 - 4c}{16} y - \frac{b^2}{64} = 0$$

Sind die Wurzeln dieser Gleichung y_1, y_2, y_3, dann ist

$$\begin{cases} x_1 = \pm(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}) \\ x_2 = \pm(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}) \\ x_3 = \pm(-\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}) \\ x_4 = \pm(-\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}), \end{cases}$$

wobei die Vorzeichen so zu wählen sind, dass

$$\sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2} \cdot \sqrt{y_3} = -\frac{b}{8}$$

§ 37a. Höhere Numerische Gleichungen. — Näherungsmethoden.

1. Rationale Wurzeln, Zerlegung des Absolutgliedes. — Man bestimmt alle Faktoren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots.$ des Absolutgliedes und stellt durch Einsetzung derselben in die gegebene Gleichung fest, ob sie derselben genügen.

Ist die Zahl der Faktoren eine sehr grosse, so stellt man mit der Substitution $x = y + 1$ eine neue Gleichung her und bestimmt wiederum die Faktoren des Absolutgliedes. Es können dann nur diejenigen Faktoren des Absolutgliedes der gegebenen Gleichung Wurzeln derselben sein, welche um 1 grösser sind als die entsprechenden Faktoren der zweiten Gleichung.

2. Newtons Methode. Hat man durch Versuche (oder durch Aufzeichnung der Kurve) gefunden, dass α annähernd eine Wurzel der Gleichung

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0$$