Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 37a. Höherer numerische Gleichungen. - Näherungsmethoden.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

3. Euler'sche Methode.

1. Transformierung der Gleichung auf die Form

$$x^4 + a x^2 + b x + c = 0$$

2. Bildung der Resolvente

$$y^3 + \frac{a}{2} y^2 + \frac{a^2 - 4c}{16} y - \frac{b^2}{64} = 0$$

Sind die Wurzeln dieser Gleichung y_1, y_2, y_3, dann ist

$$\begin{cases} x_1 = \pm(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}) \\ x_2 = \pm(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}) \\ x_3 = \pm(-\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}) \\ x_4 = \pm(-\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3}), \end{cases}$$

wobei die Vorzeichen so zu wählen sind, dass

$$\sqrt{y_1} \cdot \sqrt{y_2} \cdot \sqrt{y_3} = -\frac{b}{8}$$

§ 37a. Höhere Numerische Gleichungen. — Näherungsmethoden.

1. Rationale Wurzeln, Zerlegung des Absolutgliedes. — Man bestimmt alle Faktoren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots.$ des Absolutgliedes und stellt durch Einsetzung derselben in die gegebene Gleichung fest, ob sie derselben genügen.

Ist die Zahl der Faktoren eine sehr grosse, so stellt man mit der Substitution $x = y + 1$ eine neue Gleichung her und bestimmt wiederum die Faktoren des Absolutgliedes. Es können dann nur diejenigen Faktoren des Absolutgliedes der gegebenen Gleichung Wurzeln derselben sein, welche um 1 grösser sind als die entsprechenden Faktoren der zweiten Gleichung.

2. Newtons Methode. Hat man durch Versuche (oder durch Aufzeichnung der Kurve) gefunden, dass α annähernd eine Wurzel der Gleichung

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0$$

ist, so ist an α noch eine Korrektion anzubringen, um den wirklichen Wert zu erhalten. Die erste Korrektion p ergiebt sich aus (Taylors Satz s. § 95)

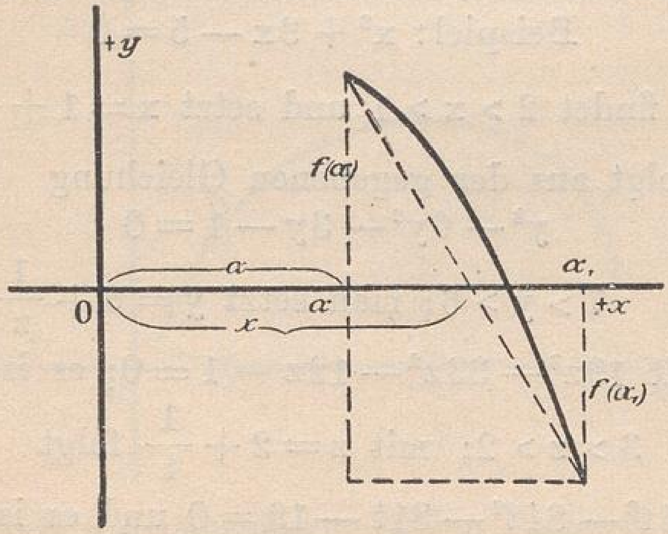
$$p = \frac{-(a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n)}{n a_0 \alpha^{n-1} + (n-1) a_1 \alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-1}} = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Setzt man nun $\alpha + p$ an Stelle von α, so erhält hiemit aus der angegebenen Beziehung eine weitere Korrektion p_1 u. s. f.

3. Regula falsi (indische Methode). Hat die Gleichung $f(x) = 0$ eine Wurzel zwischen α und α_1 ($f(\alpha)$ und $f(\alpha_1)$ haben also entgegengesetzte Vorzeichen), so erhält man einen angenäherten Wert für die Wurzel, wenn man an Stelle des Schnittpunktes der Kurve mit der X achse, den der Sehne setzt, welche die zu den Abscissen α und α_1 gehörigen Kurvenpunkte verbindet; man hat dann:

$$\frac{x - \alpha}{f(\alpha)} = \frac{x - \alpha_1}{f(\alpha_1)}, \text{ somit}$$

$$x = \alpha + \frac{(\alpha_1 - \alpha) f(\alpha)}{f(\alpha) - f(\alpha_1)}.$$



Mit dem neuen Wert und einem benachbarten, kann das Verfahren wiederholt werden u. s. f. — Dieses Verfahren ist insbesondere bei transcendenten Gleichungen anwendbar. Beispiel:

$$x^x = 100, \text{ also}$$
$$x \log x = 2 \text{ oder } x \log x - 2 = 0.$$

Ausrechnung:

x	f(x) = x log x − 2
1	− 2
2	− 1,4
3	− 0,5687
4	+ 0,4084

$$x = 3 + \frac{1 \,.\, 0{,}57}{0{,}98} = 3{,}58$$

3,58	+ 0,0171
3,60	− 0,0027

$$x = 3{,}58 + \frac{0{,}02 \,.\, 0{,}0171}{0{,}0198}$$
$$= 3{,}58 + 0{,}01727 = 3{,}59727 \text{ u. s. f.}$$

(die richtige Wurzel liegt zwischen 3,59728 und 3,59729).

4) Kettenbruchmethode von Lagrange.

Beispiel: $x^3 + 3x - 5 = 0$

Man findet $2 > x > 1$ und setzt $x = 1 + \frac{1}{y}$;

hiermit folgt aus der gegebenen Gleichung

$$y^3 - 6y^2 - 3y - 1 = 0$$

nun ist $7 > y > 6$; man setzt $y = 6 + \frac{1}{z}$

und erhält $19z^3 - 33z^2 - 12z - 1 = 0$; es ist

$3 > z > 2$; mit $z = 2 + \frac{1}{t}$ folgt

$5t^3 - 84t^2 - 81t - 19 = 0$ und es ist

$18 > t > 17$ u. s. f.

Es ist nun: $$x = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{17 + \ldots}}} = 1{,}15416$$

oder $$x = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{18}}} = 1{,}15418.$$

§ 37b. Grösste und kleinste Werte.

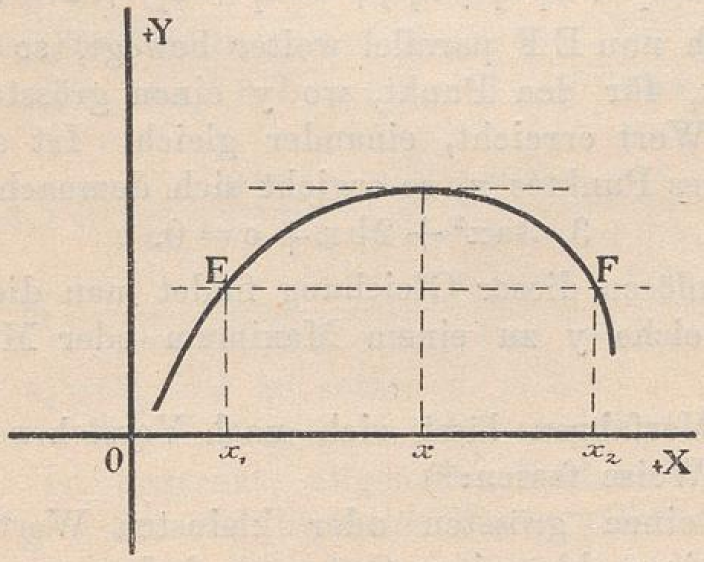
(Elementare Behandlung.)

Ist y eine Funktion von x, also eine von x abhängige Grösse, und z. B.

$$1.\quad y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

so können hiebei die verschiedenen Werte von x als Abscissen, die von y als Ordinaten einer Kurve betrachtet werden.

Zieht man eine Parallele E F zur X axe, welche die



betreffende Funktionskurve in den Punkten E, F, deren Abscissen x_1 und x_2 sind, schneidet, so hat y in diesen