Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 37b. Grösste und kleinste Werte.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

Es ist nun: $x = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{17 + \ldots}}} = 1{,}15416$

oder $x = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{18}}} = 1{,}15418.$

§ 37b. Grösste und kleinste Werte.

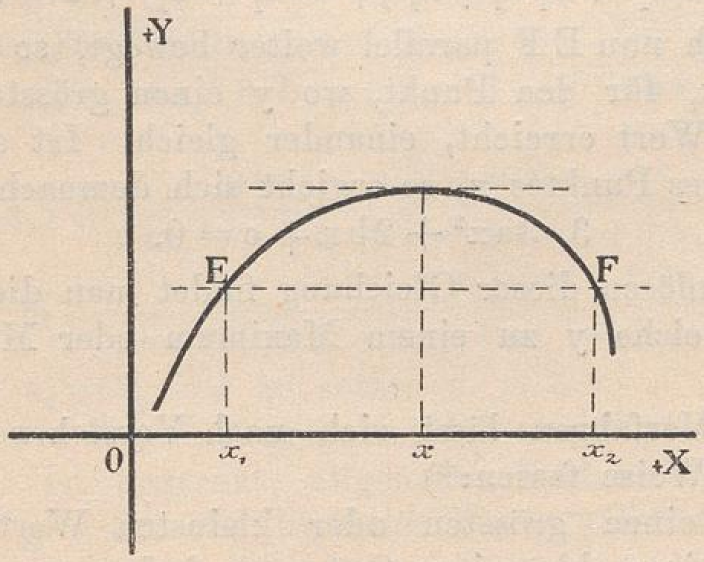
(Elementare Behandlung.)

Ist y eine Funktion von x, also eine von x abhängige Grösse, und z. B.

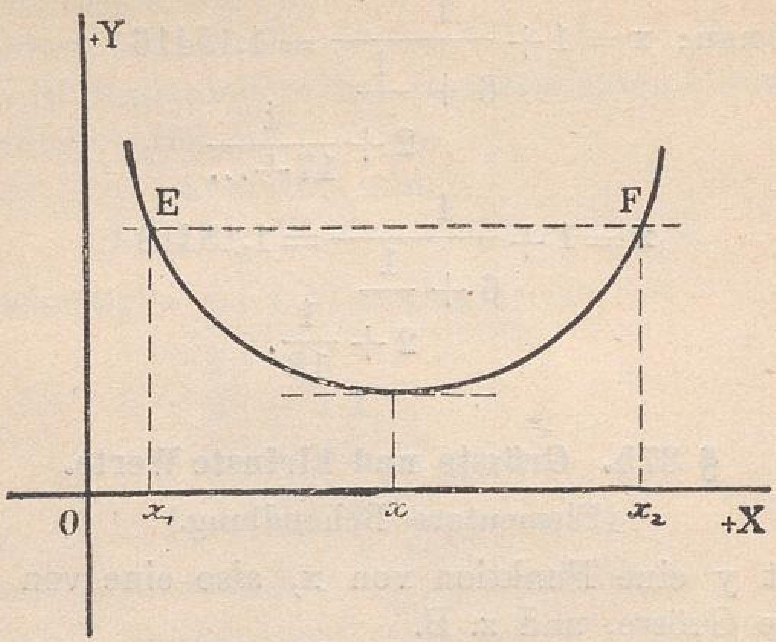
$$1.\ y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

so können hiebei die verschiedenen Werte von x als Abscissen, die von y als Ordinaten einer Kurve betrachtet werden.

Zieht man eine Parallele E F zur X axe, welche die



betreffende Funktionskurve in den Punkten E, F, deren Abscissen x_1 und x_2 sind, schneidet, so hat y in diesen



Punkten E und F die gleichen Werte, es ist also für obiges Beispiel 1.
$ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d$, woraus $a(x_1^3 - x_2^3) + b(x_1^2 - x_2^2) + c(x_1 - x_2) = 0$, folglich nach Division mit $x_1 - x_2$.

$$2.\ a(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) + b(x_1 + x_2) + c = 0.$$

Wenn sich nun EF parallel weiter bewegt, so werden x_1 und x_2 für den Punkt, wo y einen grössten oder kleinsten Wert erreicht, einander gleich. Ist die Abscisse dieses Punktes x, so ergiebt sich demnach aus 2.

$$3.\ 3ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung findet man die Werte von x, welche y zu einem Maximum oder Minimum machen.

Das Verfahren lässt sich nach Vorstehendem in folgender Weise fassen:*)

Um einen grössten oder kleinsten Wert (oder mehrere) einer abhängigen Grösse zu finden, muss man:

---

*) Vergl. hiezu: Martus, Maxima und Minima, Berlin 1861.

1. Die Funktion in einer unabhängigen veränderlichen Grösse x ausdrücken;

2. in diesen Ausdruck x_1 und dann x_2 einsetzen und die sich ergebenden Ausdrücke einander gleich setzen;

3. die gleich hohen Glieder zusammenfassen, so dass sich mit dem Faktor $x_1 - x_2$ durchdividieren lässt;

4. nachdem mit $x_1 - x_2$ durchdividiert ist, hat man in der hiedurch erhaltenen Gleichung $x_1 = x_2 = x$ zu setzen und die Gleichung aufzulösen. Für die gefundenen Werte von x erreicht y ein Maximum oder Minimum.

5. Ob ein grösster oder kleinster Wert vorliegt, ergiebt sich aus der Natur der Aufgabe oder durch Berechnung der Werte von y für solche Werte von x, die dem gefundenen benachbart sind.

Bemerkungen: 1. Bei Funktionen, in denen eine Quadratwurzel vorkommt, muss vor dem Dividieren mit $x_1 - x_2$ in der Regel noch umgeformt werden.

Beispiel:

$$mx_1 + n + \sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} = mx_2 + n + \sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c},$$

$$m(x_1 - x_2) + \sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} - \sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c} = 0,$$

woraus

$$m(x_1 - x_2) + \frac{a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2)}{\sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} + \sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c}} = 0,$$

folglich $m + \dfrac{a(x_1 + x_2) + b}{\sqrt{ax_1^2 + bx_1 + c} + \sqrt{ax_2^2 + bx_2 + c}} = 0.$

Nun ist $x_1 = x_2 = x$ zu setzen u. s. f.

2) Das Anwendungsgebiet der obigen, elementaren Methode ist begrenzt; allgemeine Verfahren für Auffindung grösster und kleinster Werte giebt die höhere Analysis (s. § 97).