Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 44. Längen- und Flächenberechnungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

Grundlinie gleich dem Umfang und dessen Höhe gleich dem Halbmesser ist.

6. Parallelogramme — Dreiecke, die einen Winkel gleich haben, verhalten sich wie die Produkte der den gleichen Winkel einschliessenden Seiten.

Datum α, (b c), f^2.

7. Aehnliche Vielecke verhalten sich dem Inhalt nach wie die Quadrate entsprechender Längen.

8. Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.

9. Das Quadrat über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten.

10. Pythagoräischer Lehrsatz:

a) Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten.

b) Allgemeiner Pythagoräischer Lehrsatz: Konstruiert man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Figuren, so ist die Figur über der Hypotenuse gleich der Summe der Figuren über den Katheten.

c) Pythagoräischer Lehrsatz für das schiefwinklige Dreieck: Das Quadrat über einer Dreiecksseite ist gleich der Summe der Quadrate der andern Dreiecksseiten vermehrt oder vermindert um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der andern auf sie, je nachdem der Gegenwinkel der ersten Seite stumpf oder spitz ist (vgl. § 58,6).

§ 44. Längen- und Flächenberechnungen.

1. Inhalt des Rechtecks: $a \cdot b$
2. „ „ Quadrats: a^2

3. Inhalt des Parallelogramms: a h

4. „ „ Dreiecks:

$$\begin{cases} \dfrac{a \,.\, h}{2}, \\ \varrho \,.\, \dfrac{a+b+c}{2} = \varrho \,.\, s, \\ \varrho_1 \,.\, \dfrac{b+c-a}{2} = \varrho_1(s-a) = \varrho_2(s-b) = \varrho_3(s-c), \\ \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \end{cases}$$

5. Inhalt des Trapezes: $\dfrac{h(b+d)}{2}$,

6. „ „ regelmässigen n Ecks: $\dfrac{n \,.\, a \,.\, \varrho}{2}$,

7. Umfang des Kreises: $2 r \pi = d \pi$; $\left(\pi = 3{,}1416; = \dfrac{22}{7}\right)$,

8. Inhalt „ „ : $r^2 \pi = \dfrac{d^2}{4} \pi$,

9. Bogen : $2 r \pi = \alpha^0 : 360^0$; Bogen $= \dfrac{\alpha r \pi}{180}$,

10. Sektor : $r^2 \pi = \alpha^0 : 360^0$; Sektor $= \dfrac{\alpha r^2 \pi}{360} = \dfrac{b r}{2}$,

11. Bogenlänge im Kreis vom Halbmesser 1:

$$\operatorname{arc} \alpha^0 = \frac{\alpha \pi}{180} = \frac{\alpha^0}{\frac{180^0}{\pi}}$$

Regelmässige Vielecke:

12. Dreieck.

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{3 r}{2} = 3 \varrho$$

$$r = \frac{2}{3} h = \frac{a}{3}\sqrt{3} = 2 \varrho$$

$$\varrho = \frac{h}{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3} = \frac{r}{2}$$

$$J = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{h^2}{3}\sqrt{3} = \frac{3\,r^2}{4}\sqrt{3} = 3\,\varrho^2\sqrt{3}$$

13. Sechseck.

$$r = a = \frac{2}{3}\,\varrho\sqrt{3}$$

$$\varrho = \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

Diagonale $d_1 = a\sqrt{3} = r\sqrt{3} = 2\,\varrho$

„ $d_2 = 2\,a = 2\,r = \frac{4}{3}\,\varrho\sqrt{3}$

$$J = \frac{3\,a^2}{2}\sqrt{3} = \frac{3\,r^2}{2}\sqrt{3} = 2\,\varrho^2\sqrt{3}$$

14. Quadrat.

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{2} = \varrho\sqrt{2}$$

$$\varrho = \frac{a}{2} = \frac{r}{2}\sqrt{2}$$

$$J = a^2 = 2\,r^2 = 4\,\varrho^2$$

15. Achteck.

$$r = \frac{a}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = \varrho\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

$$\varrho = \frac{a}{2}(\sqrt{2} + 1) = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$a = r\sqrt{2 - \sqrt{2}} = 2\,\varrho(\sqrt{2} - 1)$$

$$d_1 = a\sqrt{2 + \sqrt{2}} = r\sqrt{2} = 2\,\varrho\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$d_2 = a(\sqrt{2} + 1) = r\sqrt{2 + \sqrt{2}} = .\,2\,\varrho$$

$$d_3 = a\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = 2\,r = 2\,\varrho\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

$$J = 2\,a^2(\sqrt{2} + 1) = 2\,r^2\sqrt{2} = 8\,\varrho^2(\sqrt{2} - 1)$$

16. Fünfeck.

$$r = \frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}} = \varrho(\sqrt{5}-1)$$

$$\varrho = \frac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}} = \frac{r}{4}(\sqrt{5}+1)$$

$$a = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2\varrho\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$$d = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1) = \frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \varrho\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$J = \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} = \frac{5r^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$= 5\varrho^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

17. Zehneck.

$$r = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1) = \frac{\varrho}{5}\sqrt{50-10\sqrt{5}}$$

$$\varrho = \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{r}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

$$a = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{2\varrho}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$$

$$d_1 = \frac{a}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \varrho(\sqrt{5}-1)$$

$$d_2 = \frac{a}{2}(3+\sqrt{5}) = \frac{r}{2}(\sqrt{5}+1) = \frac{\varrho}{5}\sqrt{50+10\sqrt{5}}$$

$$d_3 = a\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 2\varrho$$

$$d_4 = a(\sqrt{5}+1) = 2r = \frac{2\varrho}{5}\sqrt{50-10\sqrt{5}}$$

$$J = \frac{5a^2}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{5r^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2\varrho^2\sqrt{25-10\sqrt{5}}.$$

§ 45. Zusammenstellung von Daten; weitere Formeln.

A) Datumsbeziehungen. Wo nichts bemerkt ist, beziehen sie sich auf das Dreieck.

1. $h, m, (\beta - \gamma)$.
2. $\begin{cases} h + h', \ a + b, \ \gamma \\ h - h', \ b - a, \ \gamma. \end{cases}$
3. a, r, α.
4. $\begin{cases} s - a, \ \varrho, \ \alpha. \\ s, \ \varrho_1, \ \alpha. \end{cases}$
5. a, h, f^2.
   Trapez: $b + d, h, f^2$.
6. $\begin{cases} s, \ \varrho, \ f^2 \\ s - a, \ \varrho_1, \ f^2. \end{cases}$
   Tangentenviereck: $a + b + c + d, \varrho, f^2$.
7. $(bc), \alpha, f^2$.
8. $b^2 - c^2, (p + q), (p - q)$ s. C_{17} dieses §.

B) Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck.

9. $b^2 = ap$, $c^2 = aq$, (a Hyp., p und q Abschn. derselben).

10. $h^2 = pq$.

11. $a^2 = b^2 + c^2$; $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

12. $bc = ah$.

13. Rationale rechtwinklige Dreiecke sind bestimmt durch

$$a = u^2 + v^2$$
$$b = u^2 - v^2$$
$$c = 2uv.$$