UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 55. Sätze über Polyeder. Formeln für Oberflächen und Rauminhalt.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

Visual Library

§ 55. Sätze über Polyeder. Formeln für Oberflächen, Rauminhalt.

A. Allgemeine Sätze.

1. Eulers Satz: Bei jedem Vielflächner ist die Summe der Anzahl der Ecken und Flächen um 2 grösser als die Zahl der Kanten,

$$E + F = K + 2.$$

2. Die Anzahl der Kanten ist halb so gross als die der Winkel,

$$K = \frac{1}{2} W.$$

3. Ein Parallelschnitt einer Pyramide ist ein der Grundfläche ähnliches Vieleck und es verhält sich der Inhalt des Parallelschnittes zu dem der Grundfläche wie die Quadrate ihrer Entfernungen oder derjenigen entsprechender Ecken von der Spitze der Pyramide.

4. Satz des Cavalieri: Haben zwei Körper gleiche Höhe und gleiche Grundflächen und sind alle Parallelschnitte, die in denselben Entfernungen von den entsprechenden Grundflächen gelegt sind, einander gleich, so sind die Körper selbst inhaltsgleich.

5. Aehnliche Körper verhalten sich der Oberfläche nach wie die Quadrate, dem Inhalt nach wie die Kuben entsprechender Längen.

B. Berechnungen.

M Mantel, O Oberfläche, G Grundfläche, Q Querschnitt, h Höhe, r Grundkreishalbmesser, R Kugelhalbmesser, a, b, c Kanten, s Mantellinie, S Mittelschnitt, V Rauminhalt.

6. Quader. $O = 2(ab + bc + ca)$
$V = 3abc$

7. Prisma. $V = G.h = Qs$

8. Pyramide. $V = G \cdot \frac{h}{3}$

9. Cylinder. $M = 2 r \pi h$

$$O = 2 r \pi (h + r)$$
$$V = r^2 \pi h.$$

Für den Hohlcylinder

$$V = (r^2 - r_1^{\,2}) \pi h$$

10. Kegel. $M = r \pi s$

$$O = r \pi (s + r)$$
$$s = \sqrt{r^2 + h^2}$$
$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi h$$

11. Pyramidenrumpf.

$$V = \frac{h}{3} (G + \sqrt{G G_1} + G_1)$$

12. Kegelrumpf.

$$M = (r + r_1) \pi s = 2 p \pi h$$

(p Mittellot zur Mantellinie bis zur Achse.)

$$V = \frac{\pi h}{3} (r^2 + r r_1 + r_1^{\,2})$$

13. Prismatoid.

$$V = \frac{h}{6} (G + G_1 + 4 S)$$

14. Schiefabgeschnittenes dreiseit. Prisma.

$$V = Q \cdot \frac{a + b + c}{3}$$

15. Kugel. $O = 4 R^2 \pi$

$$V = \frac{4 R^3 \pi}{3}$$

Kugelzone. $O = 2 R \pi h$

$$V = \frac{\pi h}{6} (3 r^2 + 3 r_1^{\,2} + h^2)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Kugelabschnitt.

$$O = 2R\pi h = (r^2 + h^2)\pi$$

$$V = \frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2) = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$$

Kugelausschnitt.

$$V = \frac{2}{3}R^2 \pi h$$

Kugelkeil. $V = \frac{\pi R^3 . \alpha}{270}$

16. Guldins Sätze. a) Die Oberfläche einer Drehfläche ist gleich dem Produkt aus der Länge der erzeugenden Linie und dem Wege des Schwerpunkts derselben.

Besteht die Erzeugende aus den Teilen $l_1, l_2, l_3 \ldots,$ deren Schwerpunkte die Abstände $s_1, s_2, s_3 \ldots$ von der Achse haben, während der Abstand des Gesamtschwerpunktes der Erzeugenden s ist, so ist

$$s(l_1 + l_2 + l_3 + \ldots) = s_1 l_1 + s_2 l_2 + s_3 l_3 + \ldots$$

b) Der Inhalt eines Drehkörpers ist gleich dem Produkt aus dem Inhalt der erzeugenden Fläche und dem Weg des Schwerpunktes derselben.

Zerlegt man die erzeugende Fläche i in die Teile $i_1, i_2, i_3 \ldots$ und sind die Achsenabstände der Schwerpunkte der ganzen Fläche und der Teile $s, s_1, s_2, s_3 \ldots,$ so ist

$$si = s_1 i_1 + s_2 i_2 + s_3 i_3 + \ldots$$

17. Regelmässige Körper. R Halbmesser der umbeschriebenen, r derjenige der einbeschriebenen Kugel, a Kante.

Tetraeder. $R = \frac{a}{4}\sqrt{6}$; $r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$;

$$O = a^2\sqrt{3}; \quad V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$$

Würfel. $R = \frac{a}{2}\sqrt{3};\quad r = \frac{a}{2};$

$O = 6a^2;\quad V = a^3.$

Oktaeder. $R = \frac{a}{2}\sqrt{2};\quad r = \frac{a}{6}\sqrt{6};$

$O = 2a^2\sqrt{3};\quad V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}.$

Dodekaeder. $R = \frac{a}{4}(1 + \sqrt{5})\sqrt{3};$

$r = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{5}} = a \operatorname{ctg} 36^0 \cos 36^0;$

$O = 3a^2\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})};$

$V = \frac{12\,F\,.\,r}{3} = 4\,F\,.\,r$ (F Seitenfläche)

$= \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}) = 5a^3 \operatorname{ctg}^2 36^0 \cos 36^0.$

Isokaeder. $R = \frac{a}{4}\sqrt{2(5 + \sqrt{5})};$

$r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}} = \frac{a}{4}\cdot\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

$= \frac{2a\cos^2 36^0}{\sqrt{3}};$

$O = 5a^2\sqrt{3};$

$V = \frac{20\,.\,F\,.\,r}{3} = \frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5});$

$= \frac{10a^3}{3}\cos^2 36^0.$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN