Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

Linie erster Ordnung, gerade Linie.

3. Die aus den beiden Gleichungen $F(x, y) = 0$ und $f(x, y) = 0$ sich ergebenden Werte von x und y sind die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden durch jene Gleichungen dargestellten Linien.

Setzt man in $F(x, y) = 0$ für y den Wert null, so ergeben sich aus der erhaltenen Gleichung die Abscissen der Schnittpunkte der betreffenden Linie mit der Xaxe; aus $x = 0$ ergeben sich die Ordinaten der Schnittpunkte mit der Yaxe.

4. Ist λ ein Zahlenfaktor, so stellt

$$F(x, y) + \lambda f(x, y) = 0$$

die Gleichung einer Linie dar, welche durch die Schnittpunkte der durch $F(x, y) = 0$ und $f(x, y) = 0$ dargestellten Linien geht.

Linie erster Ordnung, gerade Linie.

§ 71. Gleichungsformen. Lagebeziehungen.

Es seien a und b die Abschnitte der Geraden auf den Axen (Koordinaten der Schnittpunkte mit den Axen), φ der Winkel der Geraden mit der + Xaxe, p die Länge des Lotes vom Ursprung auf die Gerade, α der Winkel, den p mit der + Xaxe bildet.

1. Gleichung der Geraden:*)

erste allgem. Form $Ax + By + C = 0$,

zweite „ $y = mx + b$

dritte „ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$

vierte „ $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$ (Normalform.)

*) Wenn sich eine der Gleichungen oder Formeln auf ein schiefwinkliges System beziehen soll, ist dies besonders bemerkt.

Symbolische Abkürzung der Gleichung
für die allgemeine Form $L=0$,
" " Normalform $l=0$.

Axenabschnitte: $a=-\frac{C}{A}=-\frac{b}{m}$

$$b=-\frac{C}{B}$$

Winkel mit der Xaxe bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{A}{B}=m=-\frac{b}{a}=-\operatorname{ctg}\alpha$$

2. Besondere Fälle:

$x=a$ Gleichg. einer Geraden $\parallel$ zur Yaxe
$y=b$ " " " $\parallel$ " X "
$\left\{\begin{array}{l} Ax+By=0 \\ y=mx \end{array}\right.$ " " " durch den Ursprung
$y=0$ " der Xaxe
$x=0$ " " Y "
$0.x+0.y+C=0$ " " ∞ fernen Geraden.

3. Gerade durch Punkt (x_1, y_1)

$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$, oder
$y-y_1=m(x-x_1)$, oder
$(x-x_1)\cos\alpha+(y-y_1)\sin\alpha=0$

(durch ein veränderliches m, bezw. α erhält man ein Strahlenbüschel.)

4. Gerade durch zwei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2)

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \text{ oder } \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

oder $(y_2-y_1)x+(x_1-x_2)y=x_1y_2-x_2y_1$, oder

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

(Zugleich Bedingung dafür, dass 3 Punkte in ger. Linie liegen.)

Gerade durch den Ursprung und Punkt (x_1, y_1)

$$x_1y-y_1x=0$$

5. Zwei parallele Gerade

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Ax + By + C_1 = 0 \end{cases} \text{ oder } \begin{cases} y = mx + b \\ y = mx + b_1, \end{cases} \text{ oder}$$

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \\ x\cos\alpha + y\sin\alpha - p_1 = 0 \end{cases}$$

Zwei gerade Linien $Ax + By + C = 0$ und $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ sind parallel, wenn $AB_1 - A_1B = 0$

6. Gerade durch Punkt (x_1, y_1) parallel zu einer gegebenen Geraden.

Gegebene Gleichung:

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{oder} \quad y = mx + b$$

gesuchte Gleichung:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \quad „ \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

7. Zwei senkrechte Gerade:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ Bx - Ay + C_1 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \text{oder} \\ „ \end{matrix} \begin{cases} y = mx + b \\ y = -\dfrac{1}{m}x + b_1. \end{cases}$$

Die Geraden

$$\left.\begin{matrix} Ax + By + C = 0 \\ \text{u. } A_1x + B_1y + C_1 = 0 \end{matrix}\right\} \text{oder} \begin{matrix} y = mx + b \text{ u.} \\ y = m_1x + b_1 \end{matrix}$$

sind senkrecht, wenn

$$AA_1 + BB_1 = 0 \text{ oder } mm_1 + 1 = 0$$

Gleichung einer Geraden, welche durch Punkt (x_1, y_1) geht und senkrecht zu der Geraden $Ax + By + C = 0$ ist:

$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$$

8. Drei Gerade $Ax + By + C = 0$, $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ gehen durch einen Punkt, oder eine Gerade geht durch den Schnittpunkt der beiden andern, wenn

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. wenn

$$A(B_1C_2-B_2C_1)+B(C_1A_2-C_2A_1)+C(A_1B_2-A_2B_1)=0$$

oder wenn die Zahlfaktoren λ, λ_1, λ_2 sich so bestimmen lassen, dass

$$\lambda(Ax+By+C)+\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda_2(A_2x + B_2y+C_2)=0.$$

§ 72. Grössenbestimmungen und -Beziehungen.

1. Koordinaten (x, y) des Teilpunktes einer Strecke, Endpunkte (x_1, y_1), (x_2, y_2):

für den Halbierungspunkt

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2};$$

Teilung im Verhältnis $m:n$

$$x=\frac{mx_2\pm nx_1}{m\pm n}, \quad y=\frac{my_2\pm ny_1}{m\pm n}$$

Das Zeichen $+$ gilt für den inneren, $-$ für den äusseren Teilpunkt.

2. Beziehungen zwischen den Koordinaten von 4 harmonischen Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2), (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2)

$$2(x_1x_2+\xi_1\xi_2)=(x_1+x_2)(\xi_1+\xi_2)$$
$$2(y_1y_2+\eta_1\eta_2)=(y_1+y_2)(\eta_1+\eta_2)$$

3. Vier durch den Ursprung gehende Gerade

$$y=m_1x \qquad y=n_1x$$
$$y=m_2x \qquad y=n_2x$$

bilden ein harmonisches Büschel, wenn

$$2(m_1m_2+n_1n_2)=(m_1+m_2)(n_1+n_2).$$

4. Entfernung e zweier Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2)

$$e=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Im schiefwinkligen System mit Achsenwinkel ω

$$e=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega}.$$

5. Gerade durch Punkt (x_1, y_1), welche mit der Xaxe den $\sphericalangle\,\varphi$ bildet:

$$y-y_1=(x-x_1)\operatorname{tg}\varphi$$

6. Winkel φ zwischen zwei Geraden bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{AB_1 - A_1B}{AA_1 + BB_1} = \pm\frac{m_1 - m}{mm_1 + 1} \quad (\text{vgl. § } 71_5 \text{ und } _7)$$

7. Gerade, welche mit $y = mx + b$ den $\sphericalangle\,\varphi$ bildet und durch Punkt (x_1, y_1) geht

$$y - y_1 = \frac{m + \operatorname{tg}\varphi}{1 - m\operatorname{tg}\varphi}(x - x_1)$$

8. Abstand p des Ursprungs von der Geraden $Ax + By + C = 0$, oder $y = mx + b$

$$p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{b}{\pm\sqrt{m^2 + 1}};$$

das Zeichen wird so gewählt, dass p positiv wird.

9. Abstand e des Punktes (x_1, y_1) von der Geraden $Ax + By + C = 0$, oder $y = mx + b$, oder $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$

$$e = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{y_1 - mx_1 - b}{\pm\sqrt{m^2 + 1}}$$
$$= x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p.$$

Das Vorzeichen der Wurzel wird so gewählt, dass für einen Punkt, der mit dem Ursprung auf derselben Seite der Geraden liegt, e positiv wird.

10. Entfernung e zweier paralleler Geraden (s. § 71_5)

$$e = \frac{C - C_1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{C - C_1}{\pm\sqrt{m^2 + 1}} = p - p_1.$$

11. Halbierungslinie des Winkels zweier Geraden

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \quad \text{oder}$$

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = \pm(x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1).$$

Sind die Geraden gegeben durch die symbolischen

Gleichungen $l=0$, $l_1=0_1$ dann ist die Gleichung der Winkelhalbierenden

$$l \mp l_1 = 0.$$

12. Inhalt J eines Dreiecks, aus den Ecken (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)

$$\pm J = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\big(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\big).$$

Liegen die drei Punkte in gerader Linie, so ist $J=0$, vergl. § 71 4. Fällt (x_3, y_3) in den Ursprung, so ist

$$\pm J = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

13. Inhalt J eines Dreiecks aus den Gleichungen der drei Seiten (Bez. s. § 19_1)

$$\pm 2J = \frac{(\Sigma \pm A B_1 C_2)^2}{(AB_1 - A_1B)(A_1B_2 - A_2B_1)(A_2B - AB_2)}.$$

Gehen die Geraden durch einen Punkt, so ist $2J=0$, vergl. § 71 8, sind irgend zwei parallel, so ist $2J=\infty$, vergl. § 71 5.

14. Inhalt eines Vielecks aus den Koordinaten der Ecken

$$\pm 2J = x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + \ldots + x_n(y_1 - y_{n-1}).$$

§ 73. Polargleichung der Geraden.

r Fahrstrahl, φ Azimut, p Lot vom Pol auf die Gerade, α Winkel zwischen p und der Polaraxe.

1. Lot zur Polaraxe:

$$r \cos \varphi = c$$

2) Parallele zur Polaraxe:

$$r \sin \varphi = c.$$

3. Gleichung der Geraden:

$$r \cos(\varphi - \alpha) = p$$

4. Zwei parallele Gerade

$$\begin{cases} r\cos(\varphi-\alpha)=p \\ r\cos(\varphi-\alpha)=p_1. \end{cases}$$

5. Zwei Gerade sind senkrecht, wenn

$$\alpha_1-\alpha=R.$$

6. Entfernung e zweier Punkte (φ_1, r_1), (φ_2, r_2)

$$e=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}.$$

7. Inhalt des Dreiecks CP_1P_2

$$J=\pm\frac{1}{2}r_1r_2\sin(\varphi_2-\varphi_1).$$

8. Inhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$

$$J=\pm\frac{1}{2}\left\{r_1r_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)+r_2r_3\sin(\varphi_3-\varphi_2)\right.$$
$$\left.+r_3r_1\sin(\varphi_1-\varphi_3)\right\}.$$

9. Bedingung dafür, dass drei Punkte in gerader Linie liegen

$$r_1r_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)+r_2r_3\sin(\varphi_3-\varphi_2)+r_3r_1\sin(\varphi_1-\varphi_3)=0.$$

10. Gleichung der Verbindungslinie der beiden Punkte (φ_1, r_1), (φ_2, r_2)

$$r_1r_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)+r_2r\sin(\varphi-\varphi_2)+rr_1\sin(\varphi_1-\varphi)=0.$$

§ 74. Strahlbüschel, Doppelverhältnis, projektivische Strahlbüschel.

(Abgekürzte Bezeichnung der Gleichung der Geraden.)

1. Strahlbüschel. Sind $l_1=0$, $l_2=0$ die Gleichungen zweier Geraden in Normalform, so ist die allgemeine Gleichung einer dritten Geraden (Teilstrahl), die durch den Schnittpunkt der beiden ersten geht,

$$l_1-\lambda l_2=0.$$

λ ist das Verhältnis der von irgend einem Punkt des Teilstrahls l_3 auf l_1 und l_2 gefällten Lote (Sinusteilverhältnis)

$$\lambda = \frac{\sin(l_1\, l_3)}{\sin(l_3\, l_2)}$$

Ist der Zahlenfaktor λ veränderlich, so ist durch die Gleichung ein Strahlbüschel dargestellt.

Sind die ersten Geraden durch ihre allgemeine Gleichung $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ gegeben, so ist die Gleichung des Teilstrahls

$$L_1 - \varkappa L_2 = 0.$$

$\varkappa$ unterscheidet sich von dem Verhältnis der Abstände durch einen konstanten Faktor.

2. Vier sich in einem Punkt schneidende Geraden können dargestellt werden durch die Gleichungen

$$\begin{cases} l_1 = 0 \\ l_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} l_1 - \lambda_1 l_2 = 0 \\ l_1 - \lambda_2 l_2 = 0 \end{matrix}$$

das Doppelverhältnis (anharmonisches Verhältnis) (a, b, c, d) der vier Strahlen a, b, c, d ist

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = (a, b, c, d) = \frac{\sin(a\,c)}{\sin(b\,c)} : \frac{\sin(a\,d)}{\sin(b\,d)}.$$

Satz: Wenn vier von einem Punkt ausgehende Strahlen a, b, c, d von einer beliebigen Geraden in den Punkten A, B, C, D geschnitten werden, so ist das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte konstant und gleich dem Doppelverhältnis des Büschels d. h.

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin(a\,c)}{\sin(b\,c)} : \frac{\sin(a\,d)}{\sin(b\,d)}.$$

Für einen gegebenen Wert des Doppelverhältnisses ist zu drei Strahlen der vierte eindeutig bestimmt.

Das Doppelverhältnis des Büschels

$$\begin{cases} l_1 - \lambda_1 l_2 = 0 \\ l_1 - \lambda_2 l_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1 - \lambda_3 l_2 = 0 \\ l_1 - \lambda_4 l_2 = 0 \end{cases} \text{ ist}$$

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

3. Harmonisches Büschel. Ist das Doppelverhältnis der vier Strahlen $= -1$, so ist das Büschel ein harmonisches; es ist dargestellt durch

$$\begin{cases} l_1 = 0 \\ l_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_1 - \lambda_1 l_2 = 0 \\ l_1 + \lambda_1 l_2 = 0 \end{cases}.$$

Die Beziehungen in Nr. 2 und 3 gelten auch, wenn die Geraden durch Gleichungen von der Form $L_1 - \lambda_1 L_2 = 0$ u. s. w. gegeben sind.

4. Projektivische Strahlbüschel. Sind

$$L_1 - \lambda_1 L_2 = 0, \quad L_1 - \lambda_2 L_2 = 0 \text{ u. s. f.}$$
$$M_1 - \lambda_1 M_2 = 0, \quad M_1 - \lambda_2 M_2 = 0 \text{ u. s. f.}$$

die Gleichungen der Strahlen zweier Büschel, so ist das Doppelverhältnis von vier Strahlen des einen Büschels gleich dem Doppelverhältnis der entsprechenden Strahlen des andern; solche Büschel heissen projektivisch.

Durch drei Paare entsprechender Strahlen sind die Büschel vollständig und eindeutig bestimmt.

§ 75. Homogene Gleichung der Geraden, trimetrische Punkt-Koordinaten.

Sind $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $l_3 = 0$ die Gleichungen dreier nicht durch einen Punkt gehenden Geraden, so kann die Gleichung jeder andern Geraden in die Form gebracht werden

$$\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \lambda_3 l_3 = 0.$$

Hiebei können l_1, l_2, l_3 auch aufgefasst werden als Grössen, die den Abständen eines Punktes der Geraden von den Seiten des Dreiecks, das von l_1, l_2, l_3 gebildet wird, proportional sind (Dreieckskoordinaten). Jeder Abstand ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem er gleich oder gegenläufig ist zu dem von einem Punkt im Innern des Dreiecks auf dieselbe Seite gefällten Lot.

§ 76. Linienkoordinaten; Gleichung des Punktes; Punktreihe; projektivische Punktreihen und Strahlbüschel.

1. Ist die Gleichung irgend einer Geraden

$$ux + vy + 1 = 0,$$

so ist die Lage der Geraden durch die Konstanten u und v gegeben; sie heissen daher die Koordinaten jener geraden Linie oder L i n i e n k o o r d i n a t e n. u und v sind die negativen reziproken Abschnitte, welche die Gerade auf den Koordinatenaxen macht.

2. Alle Geraden, deren Koordinaten einer Gleichung

$$(1)\quad Au + Bv + C = 0$$

genügen, gehen durch einen Punkt, dessen Koordinaten $x = \frac{A}{C}$ und $y = \frac{B}{C}$ sind; die Gleichung (1) heisst a l l g e m e i n e G l e i c h u n g d e s P u n k t e s. Die Gleichung

$$(2)\quad au + bv + 1 = 0$$

heisst die N o r m a l f o r m der Gleichung des Punktes.

3. Eine Gleichung nten Grades in u und v stellt eine von Geraden eingehüllte Kurve dar; bestimmt man aus dieser Gleichung und der Gleichung eines Punktes die gemeinschaftlichen Werte von u und v, so ergeben sich aus denselben n Tangenten an die Kurve; diese heisst eine L i n i e n t e r K l a s s e. Die Ordnungszahl giebt die Zahl der Schnittpunkte der Kurve mit einer Geraden an, die Klassenzahl die Anzahl der Tangenten der Kurve, die durch einen bestimmten Punkt gehen.

4. Sind $\Sigma = 0$ und $\Sigma_1 = 0$ die Gleichungen zweier Umhüllungslinien, so stellt $\Sigma + \lambda\Sigma_1 = 0$ eine Umhüllungslinie dar, welche alle gemeinschaftlichen Tangenten von $\Sigma = 0$ und $\Sigma_1 = 0$ berührt (vgl. § 70_4).

5. Sind $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ die Gleichungen zweier Punkte P_1 und P_2, so ist

$$U_1 - \lambda U_2 = 0$$

die Gleichung eines Punktes auf der Verbindungslinie von P_1 und P_2; ist λ veränderlich, so hat man die Gleichung einer Punktreihe.

6. Doppelverhältnis. Sind

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} U_1 - \lambda_1 U_2 = 0 \\ U_1 - \lambda_2 U_2 = 0 \end{cases}$$

vier Punkte auf einer Geraden, so ist das Doppelverhältnis derselben ausgedrückt durch $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

7. Harmonische Punkte. Wenn $\lambda_1 : \lambda_2 = -1$, so sind die vier Punkte (von Nr. 6) harmonische Punkte; sie sind also dargestellt durch

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} U_1 - \lambda U_2 = 0 \\ U_1 + \lambda U_2 = 0 \end{cases}$$

8. Projektivische Punktreihen. Zwei Punktreihen $U_1 - \lambda U_2 = 0$ und $V_1 - \lambda V_2 = 0$ sind projektivisch.

Eine Punktreihe $U_1 - \lambda U_2 = 0$ und ein Strahlbüschel $L_1 - \lambda L_2 = 0$ sind projektivisch.

§ 77. Homogene Gleichung des Punktes, trimetrische Linienkoordinaten.

Sind $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ die Gleichungen dreier nicht auf einer Geraden liegenden festen Punkte, so kann die Gleichung jedes anderen Punktes in die Form gebracht werden

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0.$$

Linien zweiter Ordnung (Kegelschnitte).

A. Der Kreis.

§ 78. Kurvengleichung; Sekante, Tangente, Polare etc.

Koordinaten des Mittelpunktes (a, b), Halbmesser r.

1. Allgemeine Gleichung des Kreises

$$(1) \quad \mathbf{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}.$$