Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 72. Grössenbestimmungen und -Beziehungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

$$A(B_1C_2 - B_2C_1) + B(C_1A_2 - C_2A_1) + C(A_1B_2 - A_2B_1) = 0$$

oder wenn die Zahlfaktoren λ, λ_1, λ_2 sich so bestimmen lassen, dass

$$\lambda(Ax + By + C) + \lambda_1(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

§ 72. Grössenbestimmungen und -Beziehungen.

1. Koordinaten (x, y) des Teilpunktes einer Strecke, Endpunkte (x_1, y_1), (x_2, y_2):

für den Halbierungspunkt

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

Teilung im Verhältnis $m:n$

$$x = \frac{mx_2 \pm nx_1}{m \pm n}, \quad y = \frac{my_2 \pm ny_1}{m \pm n}$$

Das Zeichen $+$ gilt für den inneren, $-$ für den äusseren Teilpunkt.

2. Beziehungen zwischen den Koordinaten von 4 harmonischen Punkten $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$

$$2(x_1x_2 + \xi_1\xi_2) = (x_1 + x_2)(\xi_1 + \xi_2)$$
$$2(y_1y_2 + \eta_1\eta_2) = (y_1 + y_2)(\eta_1 + \eta_2)$$

3. Vier durch den Ursprung gehende Gerade

$$y = m_1x \qquad y = n_1x$$
$$y = m_2x \qquad y = n_2x$$

bilden ein harmonisches Büschel, wenn

$$2(m_1m_2 + n_1n_2) = (m_1 + m_2)(n_1 + n_2).$$

4. Entfernung e zweier Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2)

$$e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Im schiefwinkligen System mit Achsenwinkel ω

$$e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega}.$$

5. Gerade durch Punkt (x_1, y_1), welche mit der Xaxe den $\sphericalangle\,\varphi$ bildet:

$$y - y_1 = (x - x_1)\operatorname{tg}\varphi$$

6. Winkel φ zwischen zwei Geraden bestimmt durch

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm \frac{AB_1 - A_1B}{AA_1 + BB_1} = \pm \frac{m_1 - m}{mm_1 + 1} \quad (\text{vgl. § } 71_5 \text{ und } _7)$$

7. Gerade, welche mit $y = mx + b$ den $\sphericalangle \varphi$ bildet und durch Punkt (x_1, y_1) geht

$$y - y_1 = \frac{m + \operatorname{tg}\varphi}{1 - m \operatorname{tg}\varphi}(x - x_1)$$

8. Abstand p des Ursprungs von der Geraden $Ax + By + C = 0$, oder $y = mx + b$

$$p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{b}{\pm\sqrt{m^2 + 1}};$$

das Zeichen wird so gewählt, dass p positiv wird.

9. Abstand e des Punktes (x_1, y_1) von der Geraden $Ax + By + C = 0$, oder $y = mx + b$, oder $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$

$$e = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{y_1 - mx_1 - b}{\pm\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$= x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p.$$

Das Vorzeichen der Wurzel wird so gewählt, dass für einen Punkt, der mit dem Ursprung auf derselben Seite der Geraden liegt, e positiv wird.

10. Entfernung e zweier paralleler Geraden (s. § 71_5)

$$e = \frac{C - C_1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{C - C_1}{\pm\sqrt{m^2 + 1}} = p - p_1.$$

11. Halbierungslinie des Winkels zweier Geraden

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \quad \text{oder}$$

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = \pm(x \cos\alpha_1 + y \sin\alpha_1 - p_1).$$

Sind die Geraden gegeben durch die symbolischen

Gleichungen $l = 0$, $l_1 = 0_1$ dann ist die Gleichung der Winkelhalbierenden

$$l \mp l_1 = 0.$$

12. Inhalt J eines Dreiecks, aus den Ecken (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)

$$\pm J = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\big(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\big).$$

Liegen die drei Punkte in gerader Linie, so ist $J = 0$, vergl. § 71₄. Fällt (x_3, y_3) in den Ursprung, so ist

$$\pm J = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

13. Inhalt J eines Dreiecks aus den Gleichungen der drei Seiten (Bez. s. § 19_1)

$$\pm 2J = \frac{(\Sigma \pm A B_1 C_2)^2}{(AB_1 - A_1 B)(A_1 B_2 - A_2 B_1)(A_2 B - AB_2)}.$$

Gehen die Geraden durch einen Punkt, so ist $2J = 0$, vergl. § 71_8, sind irgend zwei parallel, so ist $2J = \infty$, vergl. § 71_5.

14. Inhalt eines Vielecks aus den Koordinaten der Ecken

$$\pm 2J = x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + \ldots + x_n(y_1 - y_{n-1}).$$

§ 73. Polargleichung der Geraden.

r Fahrstrahl, φ Azimut, p Lot vom Pol auf die Gerade, α Winkel zwischen p und der Polaraxe.

1. Lot zur Polaraxe:

$$r \cos \varphi = c$$

2) Parallele zur Polaraxe:

$$r \sin \varphi = c.$$

3. Gleichung der Geraden:

$$r \cos(\varphi - \alpha) = p$$