Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 74. Strahlbüschel, Doppelverhältnis, projektivische Strahlbüschel.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

4. Zwei parallele Gerade

$$\begin{cases} r\cos(\varphi-\alpha)=p \\ r\cos(\varphi-\alpha)=p_1. \end{cases}$$

5. Zwei Gerade sind senkrecht, wenn

$$\alpha_1-\alpha=R.$$

6. Entfernung e zweier Punkte (φ_1, r_1), (φ_2, r_2)

$$e=\sqrt{r_1^{\,2}+r_2^{\,2}-2\,r_1\,r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}.$$

7. Inhalt des Dreiecks $C P_1 P_2$

$$J=\pm\frac{1}{2}\,r_1\,r_2\sin(\varphi_2-\varphi_1).$$

8. Inhalt des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$

$$J=\pm\frac{1}{2}\left\{r_1\,r_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)+r_2\,r_3\sin(\varphi_3-\varphi_2)\right.$$
$$\left.+\,r_3\,r_1\sin(\varphi_1-\varphi_3)\right\}.$$

9. Bedingung dafür, dass drei Punkte in gerader Linie liegen

$$r_1\,r_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)+r_2\,r_3\sin(\varphi_3-\varphi_2)+r_3\,r_1\sin(\varphi_1-\varphi_3)=0.$$

10. Gleichung der Verbindungslinie der beiden Punkte (φ_1, r_1), (φ_2, r_2)

$$r_1\,r_2\sin(\varphi_2-\varphi_1)+r_2\,r\sin(\varphi-\varphi_2)+r\,r_1\sin(\varphi_1-\varphi)=0.$$

§ 74. Strahlbüschel, Doppelverhältnis, projektivische Strahlbüschel.

(Abgekürzte Bezeichnung der Gleichung der Geraden.)

1. Strahlbüschel. Sind $l_1=0$, $l_2=0$ die Gleichungen zweier Geraden in Normalform, so ist die allgemeine Gleichung einer dritten Geraden (Teilstrahl), die durch den Schnittpunkt der beiden ersten geht,

$$l_1-\lambda\,l_2=0.$$

λ ist das Verhältnis der von irgend einem Punkt des Teilstrahls l_3 auf l_1 und l_2 gefällten Lote (Sinusteilverhältnis)

$$\lambda = \frac{\sin(l_1\, l_3)}{\sin(l_3\, l_2)}$$

Ist der Zahlenfaktor λ veränderlich, so ist durch die Gleichung ein Strahlbüschel dargestellt.

Sind die ersten Geraden durch ihre allgemeine Gleichung $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ gegeben, so ist die Gleichung des Teilstrahls

$$L_1 - \varkappa L_2 = 0.$$

$\varkappa$ unterscheidet sich von dem Verhältnis der Abstände durch einen konstanten Faktor.

2. Vier sich in einem Punkt schneidende Geraden können dargestellt werden durch die Gleichungen

$$\begin{cases} l_1 = 0 \\ l_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} l_1 - \lambda_1 l_2 = 0 \\ l_1 - \lambda_2 l_2 = 0 \end{matrix}$$

das Doppelverhältnis (anharmonisches Verhältnis) (a, b, c, d) der vier Strahlen a, b, c, d ist

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = (a, b, c, d) = \frac{\sin(a\,c)}{\sin(b\,c)} : \frac{\sin(a\,d)}{\sin(b\,d)}.$$

Satz: Wenn vier von einem Punkt ausgehende Strahlen a, b, c, d von einer beliebigen Geraden in den Punkten A, B, C, D geschnitten werden, so ist das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte konstant und gleich dem Doppelverhältnis des Büschels d. h.

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin(a\,c)}{\sin(b\,c)} : \frac{\sin(a\,d)}{\sin(b\,d)}.$$

Für einen gegebenen Wert des Doppelverhältnisses ist zu drei Strahlen der vierte eindeutig bestimmt.

Das Doppelverhältnis des Büschels

$$\begin{cases} l_1 - \lambda_1 l_2 = 0 \\ l_1 - \lambda_2 l_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} l_1 - \lambda_3 l_2 = 0 \\ l_1 - \lambda_4 l_2 = 0 \end{cases} \text{ ist}$$

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

3. Harmonisches Büschel. Ist das Doppelverhältnis der vier Strahlen $= -1$, so ist das Büschel ein harmonisches; es ist dargestellt durch

$$\begin{cases} l_1 = 0 \\ l_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} l_1 - \lambda_1 l_2 = 0 \\ l_1 + \lambda_1 l_2 = 0 \end{cases}.$$

Die Beziehungen in Nr. 2 und 3 gelten auch, wenn die Geraden durch Gleichungen von der Form $L_1 - \lambda_1 L_2 = 0$ u. s. w. gegeben sind.

4. Projektivische Strahlbüschel. Sind

$$L_1 - \lambda_1 L_2 = 0, \quad L_1 - \lambda_2 L_2 = 0 \text{ u. s. f.}$$
$$M_1 - \lambda_1 M_2 = 0, \quad M_1 - \lambda_2 M_2 = 0 \text{ u. s. f.}$$

die Gleichungen der Strahlen zweier Büschel, so ist das Doppelverhältnis von vier Strahlen des einen Büschels gleich dem Doppelverhältnis der entsprechenden Strahlen des andern; solche Büschel heissen projektivisch.

Durch drei Paare entsprechender Strahlen sind die Büschel vollständig und eindeutig bestimmt.

§ 75. Homogene Gleichung der Geraden, trimetrische Punkt-Koordinaten.

Sind $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $l_3 = 0$ die Gleichungen dreier nicht durch einen Punkt gehenden Geraden, so kann die Gleichung jeder andern Geraden in die Form gebracht werden

$$\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \lambda_3 l_3 = 0.$$

Hiebei können l_1, l_2, l_3 auch aufgefasst werden als Grössen, die den Abständen eines Punktes der Geraden von den Seiten des Dreiecks, das von l_1, l_2, l_3 gebildet wird, proportional sind (Dreieckskoordinaten). Jeder Abstand ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem er gleich oder gegenläufig ist zu dem von einem Punkt im Innern des Dreiecks auf dieselbe Seite gefällten Lot.