



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

A. Der Kreis.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-78595](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-78595)

die Gleichung eines Punktes auf der Verbindungslinie von P_1 und P_2 ; ist λ veränderlich, so hat man die Gleichung einer Punktreihe.

6. Doppelverhältnis. Sind

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} U_1 - \lambda_1 U_2 = 0 \\ U_1 - \lambda_2 U_2 = 0 \end{cases}$$

vier Punkte auf einer Geraden, so ist das Doppelverhältnis derselben ausgedrückt durch $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

7. Harmonische Punkte. Wenn $\lambda_1 : \lambda_2 = -1$, so sind die vier Punkte (von Nr. 6) harmonische Punkte; sie sind also dargestellt durch

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} U_1 - \lambda U_2 = 0 \\ U_1 + \lambda U_2 = 0 \end{cases}$$

8. Projektivische Punktreihen. Zwei Punktreihen $U_1 - \lambda U_2 = 0$ und $V_1 - \lambda V_2 = 0$ sind projektivisch.

Eine Punktreihe $U_1 - \lambda U_2 = 0$ und ein Strahlbüschel $L_1 - \lambda L_2 = 0$ sind projektivisch.

§ 77. Homogene Gleichung des Punktes, trimetrische Linienkoordinaten.

Sind $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ die Gleichungen dreier nicht auf einer Geraden liegenden festen Punkte, so kann die Gleichung jedes anderen Punktes in die Form gebracht werden

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0.$$

Linien zweiter Ordnung (Kegelschnitte).

A. Der Kreis.

§ 78. Kurvengleichung; Sekante, Tangente, Polare etc.

Koordinaten des Mittelpunktes (a, b) , Halbmesser r .

1. Allgemeine Gleichung des Kreises

$$(1) \ x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

$$2. \quad (2) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$a = -\frac{A}{2}, \quad b = -\frac{B}{2}, \quad r = \frac{1}{2} \sqrt{A^2 + B^2 - 4C}.$$

Ist $A^2 = 4C$, oder $B^2 = 4C$, dann berührt der Kreis die X-, bzw. die Yaxe, ist $C = 0$, so geht der Kreis durch den Ursprung. — Für die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Axen ist $x_1 + x_2 = 2a$, $y_1 + y_2 = 2b$.

3. Der Ursprung ist Mittelpunkt:

$$(3) \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad (\text{Mittelpunktsgleichung}).$$

4. Mittelpunkt auf der Xaxe im Abstand r vom Ursprung:

$$y^2 = 2rx - x^2 \quad (\text{Scheitelgleichung}).$$

5. Gleichung für ein schiefwinkliges System:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + 2(x - a)(y - b) \cos \omega = r^2.$$

6. Sekante durch die Punkte (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , Mittelpunkt im Ursprung:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \quad \text{oder} \quad y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} (x - x_1).$$

7. Tangente, Berührungspunkt (x_1, y_1) , Mittelpunkt $(0, 0)$:

$$(1) \quad x x_1 + y y_1 = r^2,$$

Mittelpunkt (a, b) :

$$(2) \quad (x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2.$$

Bezeichnet man den Winkel, den der Halbmesser zum Berührungspunkt mit der Xaxe macht mit α , so gehen die vorstehenden Gleichungen (1) und (2) über in

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = r$$

$$(x - a) \cos \alpha + (y - b) \sin \alpha = r.$$

Die Gerade $y = mx + b$ ist Tangente an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$, wenn

$$m = -\frac{x_1}{y_1}, \quad b = \frac{r^2}{y_1}.$$

Die Koordinaten des Berührungspunktes

(x_1, y_1) einer von dem Punkt (x', y') ausserhalb des Kreises gezogenen Tangente ergeben sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x' x_1 + y' y_1 &= r^2 \\ x_1^2 + y_1^2 &= r^2. \end{aligned}$$

Die Gleichung dieser Tangente (zwei Lagen) ist

$$y - y' = \frac{-x' y' \pm r \sqrt{x'^2 + y'^2 - r^2}}{r^2 - x'^2} (x - x').$$

8. Polare (s. § 49) des Punktes (x_1, y_1) in Beziehung auf den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$

$$x x_1 + y y_1 = r^2.$$

Die Koordinaten des Pols der Geraden $Ax + By + C = 0$ sind

$$x_1 = -\frac{Ar^2}{C}, \quad y_1 = -\frac{Br^2}{C}.$$

9. Kreis durch drei Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$; er ist bestimmt durch die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} (x - a)^2 + (y - b)^2 &= r^2 \\ (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 &= r^2 \\ (x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 &= r^2 \\ (x_3 - a)^2 + (y_3 - b)^2 &= r^2, \end{aligned}$$

seine Gleichung ist daher

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad \begin{array}{l} \text{(Zugleich Bedingung da-} \\ \text{für, dass vier Punkte auf} \\ \text{einem Kreis liegen.)} \end{array}$$

10. Zwei Kreise

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

$$x^2 + y^2 + A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

sind konzentrisch, wenn $A = A_1, B = B_1$.

11. Potenzlinie (s. § 51) zweier Kreise (s. Nr. 10):

$$(A - A_1)x + (B - B_1)y + C - C_1 = 0$$

(Differenz der Kreisgleichungen, vgl. § 51₃ und § 70₄).

§ 79. Polarkoordinaten.

Ist O der Pol (Anfangspunkt), M der Mittelpunkt, OX die Polaraxe, \sphericalangle MOX = α , \sphericalangle POX = φ , OP = ρ , OM = d, so ist

1. die Gleichung des Kreises

$$(\rho \cos \varphi - d \cos \alpha)^2 + (\rho \sin \varphi - d \sin \alpha)^2 = r^2 \text{ oder} \\ \rho^2 - 2 \rho d \cos(\varphi - \alpha) + d^2 = r^2.$$

Fällt OM mit OX zusammen (Mittelpunkt auf der Polaraxe), so ist die Gleichung des Kreises

$$\rho^2 - 2 \rho d \cos \varphi + d^2 = r^2.$$

Liegt ausserdem O auf dem Kreis, so ist

$$\rho = 2 r \cos \varphi.$$

2. Hat der Leitstrahl für seine Schnittpunkte mit dem Kreis die Längen ρ_1 und ρ_2 , so ist

$$d \cos(\varphi - \alpha) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}.$$

3. Für den berührenden Leitstrahl ist

$$d \sin(\varphi - \alpha) = r.$$

B. Parabel, Ellipse, Hyperbel.

§ 80. Kurvengleichungen; Sekante, Tangente, Polare etc.

1. Stücke und Bezeichnungen.

Grosse Axe 2 a }
kleine „ 2 b } bei Ellipse und Hyperbel

Parameter 2 p (= Sehne durch einen Brennpunkt parallel zu der Leitlinie); für Ellipse und Hyperbel ist

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Lineare Exzentrizität (Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt) ist bei der

$$\text{Ellipse } f = \sqrt{a^2 - b^2};$$