Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 78. Kurvengleichung ; Sekante, Tangente, Polare etc.

die Gleichung eines Punktes auf der Verbindungslinie von P_1 und P_2; ist λ veränderlich, so hat man die Gleichung einer Punktreihe.

6. Doppelverhältnis. Sind

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} U_1 - \lambda_1 U_2 = 0 \\ U_1 - \lambda_2 U_2 = 0 \end{cases}$$

vier Punkte auf einer Geraden, so ist das Doppelverhältnis derselben ausgedrückt durch $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

7. Harmonische Punkte. Wenn $\lambda_1 : \lambda_2 = -1$, so sind die vier Punkte (von Nr. 6) harmonische Punkte; sie sind also dargestellt durch

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} U_1 - \lambda U_2 = 0 \\ U_1 + \lambda U_2 = 0 \end{cases}$$

8. Projektivische Punktreihen. Zwei Punktreihen $U_1 - \lambda U_2 = 0$ und $V_1 - \lambda V_2 = 0$ sind projektivisch.

Eine Punktreihe $U_1 - \lambda U_2 = 0$ und ein Strahlbüschel $L_1 - \lambda L_2 = 0$ sind projektivisch.

§ 77. Homogene Gleichung des Punktes, trimetrische Linienkoordinaten.

Sind $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ die Gleichungen dreier nicht auf einer Geraden liegenden festen Punkte, so kann die Gleichung jedes anderen Punktes in die Form gebracht werden

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0.$$

Linien zweiter Ordnung (Kegelschnitte).

A. Der Kreis.

§ 78. Kurvengleichung; Sekante, Tangente, Polare etc.

Koordinaten des Mittelpunktes (a, b), Halbmesser r.

1. Allgemeine Gleichung des Kreises

$$(1) \quad \mathbf{x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0}.$$

2. (2) $(\mathbf{x} - \mathbf{a})^2 + (\mathbf{y} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{r}^2$

$$a = -\frac{A}{2},\ b = -\frac{B}{2},\ r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}.$$

Ist $A^2 = 4C$, oder $B^2 = 4C$, dann berüht der Kreis die X-, bezw. die Y axe, ist $C = 0$, so geht der Kreis durch den Ursprung. — Für die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Axen ist $x_1 + x_2 = 2a$, $y_1 + y_2 = 2b$.

3. Der Ursprung ist Mittelpunkt:

(3) $x^2 + y^2 = r^2$ (Mittelpunktsgleichung).

4. Mittelpunkt auf der Xaxe im Abstand r vom Ursprung:

$y^2 = 2rx - x^2$ (Scheitelgleichung).

5. Gleichung für ein schiefwinkliges System:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + 2(x - a)(y - b)\cos\omega = r^2.$$

6. Sekante durch die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), Mittelpunkt im Ursprung:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \text{ oder } y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1).$$

7. Tangente, Berührungspunkt (x_1, y_1), Mittelpunkt (0, 0):

(1) $\mathbf{x x_1 + y y_1 = r^2}$,

Mittelpunkt (a, b):

(2) $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$.

Bezeichnet man den Winkel, den der Halbmesser zum Berührungspunkt mit der X axe macht mit α, so gehen die vorstehenden Gleichungen (1) und (2) über in

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = r$$
$$(x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha = r.$$

Die Gerade $y = mx + b$ ist Tangente an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$, wenn

$$m = -\frac{x_1}{y_1},\ b = \frac{r^2}{y_1}.$$

Die Koordinaten des Berührungspunktes

(x_1, y_1) einer von dem Punkt (x', y') ausserhalb des Kreises gezogenen Tangente ergeben sich aus den Gleichungen

$$x' x_1 + y' y_1 = r^2$$
$$x_1^{\,2} + y_1^{\,2} = r^2.$$

Die Gleichung dieser Tangente (zwei Lagen) ist

$$y - y' = \frac{-x' y' \pm r\sqrt{x'^2 + y'^2 - r^2}}{r^2 - x'^2}(x - x').$$

8. Polare (s. § 49) des Punktes (x_1, y_1) in Beziehung auf den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$

$$x x_1 + y y_1 = r^2.$$

Die Koordinaten des Pols der Geraden $Ax + By + C = 0$ sind

$$x_1 = -\frac{A r^2}{C},\quad y_1 = -\frac{B r^2}{C}.$$

9. Kreis durch drei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3); er ist bestimmt durch die vier Gleichungen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$
$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$$
$$(x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 = r^2$$
$$(x_3 - a)^2 + (y_3 - b)^2 = r^2,$$

seine Gleichung ist daher

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2, & x, & y, & 1 \\ x_1^{\,2} + y_1^{\,2}, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^{\,2} + y_2^{\,2}, & x_2, & y_2, & 1 \\ x_3^{\,2} + y_3^{\,2}, & x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

(Zugleich Bedingung dafür, dass vier Punkte auf einem Kreis liegen.)

10. Zwei Kreise

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$
$$x^2 + y^2 + A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

sind konzentrisch, wenn $A = A_1$, $B = B_1$.

11. Potenzlinie (s. § 51) zweier Kreise (s. Nr. 10):

$$(A - A_1)x + (B - B_1)y + C - C_1 = 0$$

(Differenz der Kreisgleichungen, vgl. $\S\,51_3$ und $\S\,70_4$).