Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 80. Kurvengleichungen ; Sekante, Tangente, Polare etc.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

§ 79. Polarkoordinaten.

Ist O der Pol (Anfangspunkt), M der Mittelpunkt, OX die Polaraxe, $\sphericalangle MOX = \alpha$, $\sphericalangle POX = \varphi$, $OP = \varrho$, $OM = d$, so ist

1. die Gleichung des Kreises

$$(\varrho \cos\varphi - d\cos\alpha)^2 + (\varrho \sin\varphi - d\sin\alpha)^2 = r^2 \text{ oder}$$
$$\varrho^2 - 2\varrho d\cos(\varphi - \alpha) + d^2 = r^2.$$

Fällt OM mit OX zusammen (Mittelpunkt auf der Polaraxe), so ist die Gleichung des Kreises

$$\varrho^2 - 2\varrho d\cos\varphi + d^2 = r^2.$$

Liegt ausserdem O auf dem Kreis, so ist

$$\varrho = 2r\cos\varphi.$$

2. Hat der Leitstrahl für seine Schnittpunkte mit dem Kreis die Längen ϱ_1 und ϱ_2, so ist

$$d\cos(\varphi - \alpha) = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}.$$

3. Für den berührenden Leitstrahl ist

$$d\sin(\varphi - \alpha) = r.$$

B. Parabel, Ellipse, Hyperbel.

§ 80. Kurvengleichungen; Sekante, Tangente, Polare etc.

1. Stücke und Bezeichnungen.

$\left.\begin{array}{l}\text{Grosse Axe } 2a \\ \text{kleine } \;\;\text{„} \;\; 2b\end{array}\right\}$ bei Ellipse und Hyperbel

Parameter 2 p (= Sehne durch einen Brennpunkt parallel zu der Leitlinie); für Ellipse und Hyperbel ist $p = \frac{b^2}{a}$.

Lineare Exzentrizität (Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt) ist bei der

Ellipse $f = \sqrt{a^2 - b^2}$;

Hyperbel $f = \sqrt{a^2 + b^2}$;

Parabel: Abstand des Brennpunktes vom Scheitel $\frac{p}{2}$;

Numerische Exzentrizität $\varepsilon = \frac{f}{a}$.

ε giebt zugleich das Verhältnis der Entfernung eines Kurvenpunktes vom Brennpunkt und seines Abstandes von der zugehörigen Leitlinie an. Es ist für die

$$\begin{array}{ll} \text{Ellipse} & \varepsilon < 1, \\ \text{Parabel} & \varepsilon = 1, \\ \text{Hyperbel} & \varepsilon > 1. \end{array}$$

Ferner ist $p = a(1 - \varepsilon^2)$; $b^2 = a \,.\, p$; $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$

Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie $= \frac{p}{\varepsilon}$.

2. Scheitelgleichung. Erste Form

$$\text{I. } y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2$$

(gemeinschaftliche Gleichung).

Diese Gleichung stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem $\varepsilon \lesseqgtr 1$. $\varepsilon = 0$ giebt die Scheitelgleichung eines Kreises.

Zweite Form:

$$\text{II.} \begin{cases} y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2 & \text{(Ellipse)} \\ y^2 = 2px & \text{(Parabel)} \\ y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 & \text{(Hyperbel).} \end{cases}$$

3. Mittelpunktsgleichung:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 & \text{(Ellipse)} \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 & \text{(Hyperbel)} \end{cases}$$

$$x^2 - y^2 = a^2 \text{ (Gleichseitige Hyperbel).}$$

4. Polargleichung.

1. Der Brennpunkt ist Pol, die Axe bezw. grosse Axe ist Polaraxe, φ ist von dem Scheitel aus gezählt, der dem Pol am nächsten liegt.

$$\varrho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Die Kurve ist eine Ellipse, Parabel, Hyperbel je nachdem $\varepsilon \lesseqgtr 1$. Für die Parabel ist insbesondere

$$\varrho = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

2. Der Mittelpunkt ist Pol, die grosse Axe Polaraxe

$$\varrho^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \text{ (Ellipse)};$$

$$\varrho^2 = \frac{-b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} \text{ (Hyperbel)}.$$

Die folgenden Gleichungen sind bei der Parabel auf die Scheitel-, bei Ellipse und Hyperbel auf die Mittelpunktsgleichung zu beziehen.

5. Sekante durch die beiden Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) der

1. Parabel:

$$(y_1 + y_2)\, y - y_1 y_2 = 2px \text{ oder}$$

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_2 + y_1}(x - x_1).$$

2. Ellipse:

$$\frac{(x_1 + x_2)\, x}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2)\, y}{b^2} = \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + 1, \text{ oder}$$

$$y - y_1 = -\frac{b^2 (x_1 + x_2)}{a^2 (y_1 + y_2)}(x - x_1).$$

3. Hyperbel:

$$\frac{(x_1+x_2)\,x}{a^2}-\frac{(y_1+y_2)\,y}{b^2}=\frac{x_1\,x_2}{a^2}-\frac{y_1\,y_2}{b^2}+1, \text{ oder}$$

$$y-y_1=\frac{b^2\,(x_1+x_2)}{a^2\,(y_1+y_2)}\,(x-x_1).$$

6. Tangente im Punkt $(x_1,\, y_1)$ der

1. Parabel: $y\,y_1=p\,(x+x_1)$.

2. Ellipse: $\frac{x\,x_1}{a^2}+\frac{y\,y_1}{b^2}=1$, oder

$$y-y_1=-\frac{b^2\,x_1}{a^2\,y_1}\,(x-x_1).$$

3. Hyperbel: $\frac{x\,x_1}{a^2}-\frac{y\,y_1}{b^2}=1$, oder

$$y-y_1=\frac{b^2\,x_1}{a^2\,y_1}\,(x-x_1).$$

7. Asymptoten der Hyperbel

$$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0.$$

Ist der Asymptotenwinkel $2\,\varphi$, so ist $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$.

Bei der gleichseitigen Hyperbel stehen die Asymptoten auf einander senkrecht.

Ein Durchmesser $y=m\,x$ schneidet, berührt im unendlich fernen Punkt (ist also Asymptote), trifft die Hyperbel nicht, je nachdem $m^2 \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \frac{b^2}{a^2}$.

8. Normale im Punkt $(x_1,\, y_1)$ der

1. Parabel: $p\,(y-y_1)+y_1\,(x-x_1)=0$, oder

$$x\,y_1+p\,y=y_1\,(x_1+p).$$

2. Ellipse: $\frac{a^2\,x}{x_1}-\frac{b^2\,y}{y_1}=a^2-b^2$, oder

$$y-y_1=\frac{a^2\,y_1}{b^2\,x_1}\,(x-x_1).$$

3. Hyperbel: $\frac{a^2 x}{x_1} + \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 + b^2$, oder

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

9. Bezeichnet man die Abscisse des Schnittpunktes der Tangente im Punkt (x_1, y_1) mit der Xaxe mit x_0, die Subtangente (Projektion des Tangentenstückes zwischen Berührungspunkt und Xaxe auf die Xaxe) mit ST, die Subnormale mit SN, so ist

	x_0	ST	SN
1. für die Parabel:	$-x_1$	$2x_1$	p
2. „ „ Ellipse	$\frac{a^2}{x_1}$	$\frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$	$-\frac{b^2 x_1}{a^2}$
3. „ „ Hyperbel	$\frac{a^2}{x_1}$	$\frac{x_1^2 - a^2}{x_1}$	$\frac{b^2 x_1}{a^2}$

Aus dem Wert von x_0 ergiebt sich für jede Kurve eine Konstruktion der Tangente im Punkte (x_1, y_1).

10. Tangente vom Punkt (x_1, y_1) ausserhalb der

1. Parabel:

$$y - y_1 = \frac{y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2 p x_1}}{2 x_1}(x - x_1).$$

2. Ellipse:

$$y - y_1 = \frac{x_1 y_1 \pm \sqrt{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 - a^2 b^2}}{x_1^2 - a^2}(x - x_1).$$

3. Hyperbel:

$$y - y_1 = \frac{x_1 y_1 \pm \sqrt{a^2 b^2 - (b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2)}}{x_1^2 - a^2}(x - x_1).$$

11. Allgemeine Gleichung der Tangente (Richtung gegeben) für die

1. Parabel: $y - mx = \frac{p}{2m}$.

2. Ellipse: $y - mx = \pm\sqrt{m^2 a^2 + b^2}$.

3. Hyperbel: $y - mx = \pm\sqrt{m^2 a^2 - b^2}$.

12. Polare des Punktes (x_1, y_1) in Beziehung auf die

1. Parabel: $yy_1 = p(x + x_1)$.
2. Ellipse: $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$.
3. Hyperbel: $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

Liegt Punkt (x_1, y_1) auf der Kurve, so ist seine Polare zugleich Tangente. Die Polare des Mittelpunkts ist die unendlich ferne Gerade; die Polare eines unendlich fernen Punktes ist ein Durchmesser.

13. Koordinaten des Pols der Geraden $Ax + By + C = 0$, für die

1. Parabel: $x_1 = + \frac{C}{A}$, $y_1 = - \frac{Bp}{A}$.
2. Ellipse: $x_1 = - \frac{a^2 A}{C}$, $y_1 = - \frac{b^2 B}{C}$.
3. Hyperbel: $x_1 = - \frac{a^2 A}{C}$, $y_1 = \frac{b^2 B}{C}$.

14. Zwei Geraden heissen konjugiert in Bezug auf einen Kegelschnitt, wenn jede durch den Pol der andern geht, die Koordinaten des Pols der einen müssen also die Gleichung der andern befriedigen.

1. Ist bei der Parabel ein unendlich ferner Punkt gegeben durch die Richtung $y = mx$, so ist der zugehörige Durchmesser
$$y = \frac{p}{m}.$$
2. Gleichungen für zwei konjugierte Durchmesser bei der

Ellipse: $Ax - By = 0$ und $\frac{Bx}{a^2} + \frac{Ay}{b^2} = 0$.

Hyperbel: $Ax + By = 0$ und $\frac{Bx}{a^2} + \frac{Ay}{b^2} = 0$.

Jede Asymptote der Hyperbel und ihr konjugierter Durchmesser fallen zusammen.

15. Gleichung in Beziehung auf zwei konjugierte Durchmesser $2a_1$, $2b_1$

1. Ellipse: $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$; Beziehung: $a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2$

2. Hyperbel: $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$: „ $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$

Sind φ und φ_1 die Winkel, welche zwei konjugierte Durchmesser mit der Hauptaxe bilden, so ist für die

3. Ellipse: $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{b^2}{a^2}$; $a_1 b_1 \sin(\varphi - \varphi_1) = ab$ (s. § 81_{24})

4. Hyperbel: $\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi_1 = +\frac{b^2}{a^2}$; $a_1 b_1 \sin(\varphi - \varphi_1) = ab$ (s. § 81_{25})

Gleichung der Hyperbel in Beziehung auf die beiden Asymptoten

$$x'y' = c^2 = \frac{f^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4};$$

gleichseitige Hyperbel $x'y' = \frac{1}{2}a^2$

16. Leitlinie (Direktrix), d. h. Polare des Brennpunktes für die

1. Parabel: $x = -\frac{p}{2}$; Brennpunkt $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

2. Ellipse: $x = \frac{a^2}{f} = \frac{a}{\varepsilon}$; f. d. Brennpunkt $(f, 0)$

3. Hyperbel: $x = \frac{a^2}{f} = \frac{a}{\varepsilon}$; „ „ „ $(f, 0)$

17. Länge des Brennstrahls, bezw. der Brennstrahlen zu dem Punkt (x_1, y_1)

1. Parabel: $r = x_1 + \frac{p}{2}$

2. Ellipse: $r = a - x_1 \varepsilon$

$r_1 = a + x_1 \varepsilon$; $\mathbf{r + r_1 = 2a}$

3. Hyperbel: $r = x_1 \varepsilon - a$

$r_1 = x_1 \varepsilon + a$; $\mathbf{r_1 - r = 2a}$

18. Krümmungsmittelpunkt (x_0, y_0) und Krümmungshalbmesser ϱ für den Punkt (x_1, y_1) der

1. Parabel: $\begin{cases} x_0 = 3x_1 + p = \dfrac{3y_1^2 + 2p^2}{2p} \\ y_0 = -\dfrac{y_1^3}{p^2} = -\dfrac{2x_1 y_1}{p} \end{cases}$

$$\varrho = \frac{(y_1^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \frac{N_x^3}{p^2}; \text{ für den Scheitel } \varrho = p.$$

2. Ellipse: $\begin{cases} x_0 = \dfrac{f^2 x_1^3}{a^4} = \dfrac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2} \\ y_0 = -\dfrac{f^2 y_1^3}{b^4} = -\dfrac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^4} \end{cases}$

$$\varrho = \frac{(b^4 x_1^2 + a^4 y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{(r r_1)^{\frac{3}{2}}}{a b} = \frac{N_x^3}{p^2}$$

N_x Normale vom Punkt $(x_1 y_1)$ bis zur Xaxe.
Für den Scheitel der grossen Axe ist

$\varrho_2 = \frac{b^2}{a} = p$, für den der kleinen

$\varrho_1 = \frac{a_2}{b}$

3. Hyperbel: $\begin{cases} x_0 = \dfrac{f^2 x_1^3}{a^4} = \dfrac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2} \\ y_0 = -\dfrac{f^2 y_1^3}{b^4} = -\dfrac{a^2 \varepsilon^2 y_1^3}{f^4} \end{cases}$

$$\varrho = \frac{(b^4 x_1{}^2 + a^4 y_1{}^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4} = \frac{(r\,r_1)^{\frac{3}{2}}}{a\,b} = \frac{N\,x^3}{p^2}$$

für den Scheitel ist

$$\varrho = \frac{b^2}{a} = p$$

19. Flächeninhalt

1. Parabelsegment S,

Sehne senkrecht zur Axe, (x_1, y_1) Koordinaten des einen Endpunkts:

$$S = \frac{4}{3}\,x_1\,y_1.$$

Beliebiges Segment; (x_1, y_1), (x_2, y_2) Koordinaten der Endpunkte

$$S = \frac{(y_1 - y_2)^3}{12\,p} = \frac{x_1 - x_2}{6} \cdot \frac{(y_1 - y_2)^2}{y_1 + y_2}$$

2. Ellipsenzone zwischen der kleinen Axe und der im Abstand x_1 dazu parallelen Sehne

$$\frac{b}{a}\left(x_1 \sqrt{a^2 - x_1{}^2} + a^2 \arcsin \frac{x_1}{a}\right)$$

Gesamte Ellipsenfläche: $a\,b\,\pi$.

3. Hyperbelsegment, Sehne senkrecht zur Xaxe:

$$S = x_1\,y_1 - a\,b\,l\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}\right)$$

20. Konfokale Kegelschnitte. — Eine Ellipse und eine Hyperbel, welche dieselben Brennpunkte haben, konfokal sind, haben folgende Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2(1-\varepsilon^2)} + 1 \\[2ex] \dfrac{x^2}{a_1{}^2} - \dfrac{y^2}{a_1{}^2(\varepsilon_1{}^2 - 1)} = 1 \end{array}\right.$$

wobei $a\,\varepsilon = a_1\,\varepsilon_1 = f$, $\varepsilon < 1$, $\varepsilon_1 > 1$. Die Gleichungen können demnach in folgende Form gebracht werden:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a_1{}^2} - \frac{y^2}{f^2 - a_1{}^2} = 1$$

Diese beiden konfokalen Kegelschnitte schneiden sich rechtwinklig (elliptische Koordinaten).

Die Gleichungen aller konfokalen Kegelschnitte sind in der Form enthalten

$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1;$$

sie stellt eine Ellipse, Hyperbel oder imaginäre Kurve dar, je nachdem $k < b^2 < a^2$, oder $b^2 < k < a^2$, oder $a^2 < k$.

§ 81. Sätze über Kegelschnitte.

A) Für jeden Kegelschnitt.

1. Die Polaren der sämtlichen Punkte einer Geraden gehen durch den Pol dieser Geraden, und die Pole sämtlicher Strahlen eines Büschels liegen auf der Polaren des Büschelmittelpunktes.

2. Die Halbierungspunkte paralleler Sehnen liegen auf einem Durchmesser.

3. Das Verhältnis der Entfernungen eines Punktes eines Kegelschnittes vom Brennpunkt und von der Leitlinie ist konstant und gleich der numerischen Exzentrizität ε. (Für die Ellipse ist $\varepsilon < 1$, für die Parabel $\varepsilon = 1$, für die Hyperbel $\varepsilon > 1$.)

4. Die Sehne, welche durch einen Brennpunkt geht und senkrecht zur grossen Axe ist, ist der Parameter.

5. Zieht man in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne Tangenten, so schneiden sich diese auf der Leitlinie, und die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit dem Brennpunkt steht senkrecht auf der Sehne.