# Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 81. Sätze über Kegelschnitte.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{{a_1}^2} - \frac{y^2}{f^2 - {a_1}^2} = 1$$

Diese beiden konfokalen Kegelschnitte schneiden sich rechtwinklig (elliptische Koordinaten).

Die Gleichungen aller konfokalen Kegelschnitte sind in der Form enthalten

$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} = 1;$$

sie stellt eine Ellipse, Hyperbel oder imaginäre Kurve dar, je nachdem $k < b^2 < a^2$, oder $b^2 < k < a^2$, oder $a^2 < k$.

## § 81. Sätze über Kegelschnitte.

### A) Für jeden Kegelschnitt.

1. Die Polaren der sämtlichen Punkte einer Geraden gehen durch den Pol dieser Geraden, und die Pole sämtlicher Strahlen eines Büschels liegen auf der Polaren des Büschelmittelpunktes.

2. Die Halbierungspunkte paralleler Sehnen liegen auf einem Durchmesser.

3. Das Verhältnis der Entfernungen eines Punktes eines Kegelschnittes vom Brennpunkt und von der Leitlinie ist konstant und gleich der numerischen Exzentrizität $\varepsilon$. (Für die Ellipse ist $\varepsilon < 1$, für die Parabel $\varepsilon = 1$, für die Hyperbel $\varepsilon > 1$.)

4. Die Sehne, welche durch einen Brennpunkt geht und senkrecht zur grossen Axe ist, ist der Parameter.

5. Zieht man in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne Tangenten, so schneiden sich diese auf der Leitlinie, und die Verbindungslinie des Schnittpunktes mit dem Brennpunkt steht senkrecht auf der Sehne.

6. Der Schnittpunkt zweier Tangenten liegt auf demjenigen Durchmesser, welcher der Sehne zwischen den Berührungspunkten konjugiert ist.

7. Sind in einer Ebene zwei Kurven zweiter Ordnung K und $K_1$ und bestimmt man zu jedem Punkt von K die Polare in Beziehung auf $K_1$, so umhüllen diese Polaren eine dritte Kurve zweiter Ordnung.

8. Satz des Pascal: Bei jedem einem Kegelschnitt einbeschriebenen einfachen Sechseck schneiden sich die drei Paare Gegenseiten in drei Punkten einer Geraden. (Konstruktion eines Kegelschnittes aus 5 Punkten.)

9. Satz des Brianchon: Bei jedem einem Kegelschnitt umbeschriebenen Sechseck schneiden sich die drei Verbindungslinien von je zwei Gegenecken in einem Punkte. (Konstruktion eines Kegelschnittes aus 5 Tangenten.)

10. Der Krümmungshalbmesser im Scheitel der grossen Axe ist gleich dem halben Parameter.

### B) Für die Parabel.

11. Die Durchmesser einer Parabel sind parallel zur Axe.

12. Der Fusspunkt des Lotes vom Brennpunkt auf eine Tangente liegt auf der Scheiteltangente. (Konstruktion der Parabel durch Umhüllung.)

13. Der Ort des Schnittpunkts zweier Parabeltangenten, die senkrecht auf einander stehen, ist die Leitlinie.

14. Die Entfernung des Berührungspunktes einer Tangente vom Brennpunkt ist gleich der Entfernung des letzteren vom Schnittpunkt der Tangente mit der Axe. (Konstruktion der Tangente.)

15. Die Tangente halbiert den Winkel zwischen dem Brennstrahl und dem durch den Berührungspunkt

gehenden Durchmesser (Konstruktion der Tangente und Normale).

16. Die Parabel kann als Ellipse betrachtet werden, deren zweiter Brennpunkt in unendlicher Entfernung liegt.

### C) Für Ellipse und Hyperbel.

17. Hat man ein System von Ellipsen, bezw. Hyperbeln, welche die Scheitel und die grosse Axe gemeinschaftlich haben, so schneiden sich alle Tangenten, welche die nämliche Abscisse für den Berührungspunkt haben, in einem und demselben Punkt der grossen Axe. (Konstruktion der Tangente.)

18. Alle Sehnen, welche einem Durchmesser parallel gezogen sind, werden von seinem konjugierten halbiert. Die Tangente im Endpunkt eines Durchmessers ist parallel zum konjugierten Durchmesser.

19. In jedem einem Kegelschnitt umbeschriebenen Parallelogramm sind die Diagonalen konjugierte Durchmesser; in jedem einem Kegelschnitt einbeschriebenen Parallelogramm sind die Seiten zwei konjugierten Durchmessern parallel.

20. Das Produkt der Entfernungen der Brennpunkte von einer Tangente ist unveränderlich ($= b^2$) und die Fusspunkte der Lote liegen auf einem Kreis, der die grosse Axe zum Durchmesser hat. (Konstruktion des Kegelschnitts durch Umhüllung.)

21. Die Tangente und die Normale in einem Punkt der Ellipse oder Hyperbel halbieren die Winkel, welche die Brennstrahlen nach diesem Punkt mit einander bilden. (Konstruktion der Tangente und der Normale.)

Hieraus folgt: Eine Ellipse und eine zu ihr konfokale Hyperbel schneiden sich unter rechten Winkeln.

22. Bei der Ellipse ist die Summe, bei der Hyperbel die Differenz der Brennstrahlen nach einem Punkt der

Kurve unveränderlich und zwar gleich der grossen Axe. (Faden-Konstruktion der Kurven.)

23. Auf jeder Sekante einer Hyperbel sind die beiden Abschnitte, welche zwischen der Kurve und ihren beiden Asymptoten liegen, einander gleich; der Abschnitt einer Tangente zwischen den Asymptoten wird durch den Berührungspunkt halbiert.

(Konstruktion der Hyperbel, wenn ein Punkt und die Asymptoten derselben gegeben sind.)

24. Der Inhalt eines Dreiecks, das zwischen zwei konjugierten Halbmessern einer Ellipse und der Verbindungslinie ihrer Endpunkte liegt, ist unveränderlich.

25. Der Inhalt eines Dreiecks, das von den Asymptoten und einer zwischen denselben liegenden Tangente einer Hyperbel eingeschlossen wird, ist unveränderlich.

---

26. Alle Parabeln sind einander ähnlich.

27. Zwei Ellipsen mit den Halbaxen $(a, b)$, $(a_1, b_1)$ sind einander ähnlich, wenn $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$; ebenso sind zwei Hyperbeln einander ähnlich, wenn $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$, d. h., wenn sie gleiche Asymptotenwinkel haben.

## § 82. Konstruktion der Kegelschnitte.

1. Parabel.

a) DX Achse, SY Scheiteltangente, DE Leitlinie, also $DS = SF = \frac{p}{2}$. — Ziehe in den beliebig, aber zweckmässig gewählten Punkten $C_1$, $C_2$, $C_3$ . . . Lote zur