



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

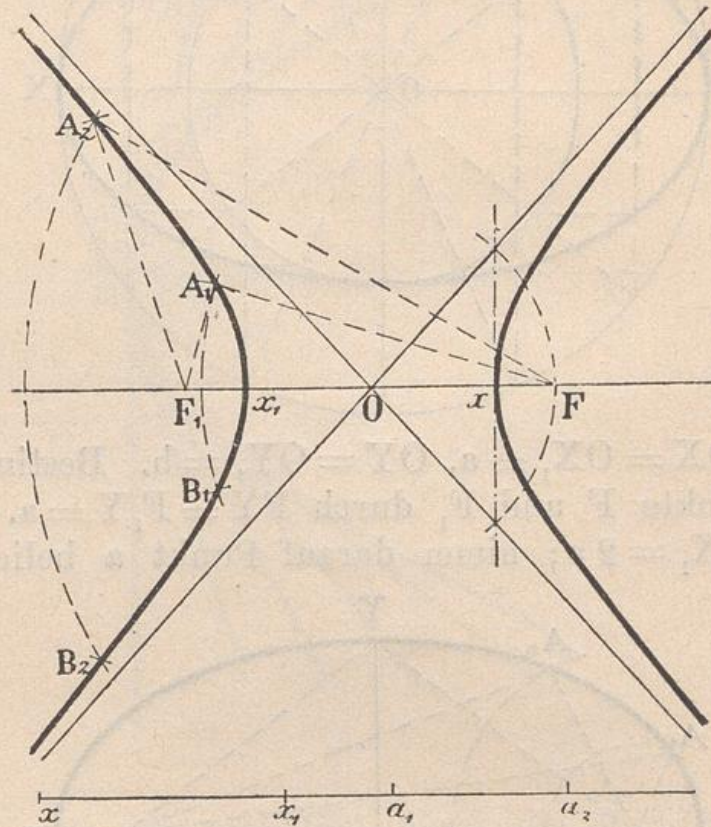
§ 83. Allgemeine Gleichung zweiten Grades.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-78595](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-78595)

3. Hyperbel.

$$OX = OX_1 = a; \quad OF = OF_1 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ziehe $xx_1 = 2a$; nimm auf der Verlängerung von xx_1 einen Punkt a_1 an und beschreibe um F mit xa_1



und um F_1 mit $x_1 a_1$ Bögen, die sich in A_1 und B_1 schneiden. A_1 und B_1 sind Punkte der Hyperbel. Ver-
fahre ebenso mit a_2 u. s. f.

(Begründung: $r - r_1 = 2a$, s. § 8122.)

§ 83. Allgemeine Gleichung zweiten Grades.

$$(1) \quad a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0.$$

1. Nach Division der Gleichung (1) mit a_{33} zeigt sich, dass die Gleichung fünf unabhängige Konstanten

enthält; eine Kurve zweiten Grades ist daher durch fünf Punkte bestimmt.

2. Die Gleichung (1) stellt ein Geradenpaar dar, wenn die Diskriminante Δ der Gleichung null ist, d. h. wenn

$$(a_{12}^2 - a_{11} a_{22})(a_{13}^2 - a_{11} a_{33}) - (a_{12} a_{13} - a_{11} a_{23})^2 = 0 \text{ oder} \\ \Delta = a_{11} a_{22} a_{33} + 2a_{23} a_{13} a_{12} - a_{11} a_{23}^2 - a_{22} a_{13}^2 - a_{33} a_{12}^2 = 0.$$

3. Wenn eine Gleichung zweiten Grades ein Linienpaar darstellt, kann sie durch Koordinatenverwandlung auf die Form gebracht werden:

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 = 0.$$

Das Linienpaar besteht aus zwei (konjugierten) imaginären, oder aus zwei reellen aber zusammenfallenden, oder aus zwei reellen und verschiedenen Geraden, je nachdem

$$a_{12}^2 - a_{11} a_{22} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0.$$

4. Wird die Gleichung (1) in Polarkoordinaten übergeführt, so ergibt sich als Polargleichung der Kurven zweiten Grades

$$(a_{11} \cos^2 \varphi + 2 a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi) r^2 \\ + 2 (a_{13} \cos \varphi + a_{23} \sin \varphi) r + a_{33} = 0.$$

Einem gegebenen Wert von φ entsprechen im allgemeinen zwei Werte von r , d. h. jeder durch den Pol gezogene Strahl schneidet die Kurve in zwei Punkten. Der eine Schnittpunkt kann im Unendlichen liegen, wenn für den bestimmten Wert von φ der Koeffizient von r^2 zu null wird, d. h. wenn

$$a_{11} \cos^2 \varphi + 2 a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi = 0, \text{ oder wenn} \\ a_{11} + 2 a_{12} \operatorname{tg} \varphi + a_{22} \operatorname{tg}^2 \varphi = 0.$$

Es giebt demnach im allgemeinen zwei solche Werte von φ und also zwei Richtungen, für welche der Strahl die Kurve im Unendlichen schneiden kann; diese beiden

Richtungen sind imaginär, reell aber zusammenfallend, reell und verschieden, d. h. die unendlich ferne Gerade hat mit der Kurve keinen Punkt, zwei zusammenfallende oder zwei verschiedene Punkte gemeinschaftlich, je nachdem

$$a_{12}^2 - a_{11} a_{22} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 0.$$

5. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades stellt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem

$$a_{12}^2 - a_{11} a_{22} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 0.$$

Sie stellt einen Kreis dar, wenn $a_{12} = 0$ und $a_{11} = a_{22}$.

6. Durch jeden Punkt kann im allgemeinen eine Sehne so gezogen werden, dass sie in ihm halbiert wird; ist die Kurve zweiten Grades durch die allgemeine Polargleichung gegeben, so hat eine Sehne vom Neigungswinkel φ den Pol zur Mitte, wenn die beiden Wurzeln von r von entgegengesetztem Vorzeichen und gleich sind. Dies ist der Fall, wenn

$$a_{13} \cos \varphi + a_{23} \sin \varphi = 0$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten, wenn

$$a_{13} x + a_{23} y = 0.$$

Giebt man nach einer Koordinatenverwandlung (Parallelverschiebung) den Koeffizienten a_{13}' und a_{23}' den Wert null, so ergeben sich daraus die Bestimmungsstücke des Mittelpunktes.

Die rechtwinkligen Koordinaten (x_0, y_0) des Mittelpunktes ergeben sich aus

$$\begin{aligned} a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13} &= 0 \\ a_{12} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23} &= 0, \end{aligned}$$

daher besitzt eine Linie zweiten Grades nicht mehr als einen Mittelpunkt. Seine Koordinaten sind

$$\begin{cases} x_0 = \frac{a_{22} a_{13} - a_{12} a_{23}}{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}} \\ y_0 = \frac{a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}}{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}. \end{cases}$$

Für die Parabel ist $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = 0$, sie hat daher keinen Mittelpunkt.

§ 84. Gleichungen weiterer Kurven.

A. Algebraische Kurven.

1. Neilsche Parabel $y = a x^{\frac{3}{2}}$.
2. Lemniskate $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$ oder $r^2(r^2 - a^2 \cos 2\varphi) = 0$
3. Conchoide $x^2 y^2 = (b + y)^2(a^2 - y^2)$ oder $(x^2 + y^2)(y - b)^2 = a^2 y^2$ oder $r = a + \frac{b}{\cos \varphi}$.
4. Cissoide $y^2(a - x) = x^3$.
5. Deskartes'sches Blatt $x^3 + y^3 = 3axy$.
6. Cassinische Kurve $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = b^4 - a^4$.
7. Cardioide $(y^2 + x^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ oder $r = a(1 + \cos \varphi)$.

B. Transcendente Kurven.

1. Logarithmische Linie $y = m e^{\frac{x}{a}}$.
2. Kettenlinie $y = \frac{m}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$.
3. Cykloide, beschrieben von einem bestimmten Punkt P auf dem Halbmesser eines Kreises, der auf einer Geraden rollt, (a Halbmesser des rollenden Kreises, a_1 Mittelpunktsabstand von P, $\varphi = \text{arc } \sphericalangle POX$, X Berührungspunkt)