Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 85. Koordinaten- und Grössenbezeichnungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

II. Geometrie des Raums.

§ 85. Koordinaten-*) und Grössenbeziehungen.

O Ursprung, P ein Punkt im Raum, $OP = r$; α, β, γ Winkel der OP mit den positiven Teilen der Koordinatenaxen; x, y, z die Koordinaten von P.

1. Ein Punkt. Die Koordinaten des Punktes P sind die Projektionen von OP auf die Axen:

$$x = r\cos\alpha,\ y = r\cos\beta,\ z = r\cos\gamma,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

2. Zwei Punkte. (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2).

$$OP_1 = r_1,\ OP_2 = r_2;$$

$$\cos(r_1, r_2) = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_1r_2}.$$

Stehen r_1 und r_2 senkrecht aufeinander, so ist

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0.$$

Entfernung $e = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$.

Für Punkt (x, y, z), der P_1P_2 im Verhältnis m : n teilt ($P_1P : PP_2 = m : n$), ist

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n};\ y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n};\ z = \frac{nz_1 + mz_2}{m + n}.$$

3. Projektionen. Ist l eine Strecke, f eine Fläche, sind ferner l_1, l_2, l_3, bezw. f_1, f_2, f_3 ihre Projektionen auf die Koordinatenebenen, so ist

1. $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 2\,l^2$.
2. $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = f^2$.

$f_1 = f\cos\alpha$, $f_2 = f\cos\beta$, $f_3 = f\cos\gamma$; α, β, γ Neigungswinkel der f gegen die Koordinatenebenen.

---

*) Es sind stets, wofern nichts anders bemerkt ist, rechtwinklige Koordinaten vorausgesetzt.

4. Inhalt V der dreiseitigen Pyramide.

1. Eine Ecke im Ursprung, die drei andern Ecken sind (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3).

$$V = \frac{1}{6}[x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_2(y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1)]$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

2. Liegt die erste Ecke nicht im Ursprung, sondern im Punkt (x, y, z), so ergiebt sich V, indem man das Koordinatensystem parallel verschiebt, so dass der Ursprung mit (x, y, z) zusammenfällt; man hat alsdann im vorigen Ausdruck

statt x_1, y_1, z_1 zu setzen $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$

Liegt (x, y, z) in derselben Ebene mit den drei übrigen Punkten, so ist $V = 0$; dies ist die Gleichung der Ebene durch jene drei Punkte.

§ 86. Aenderung des Koordinatensystemes.

1. Parallele Verschiebung der Axen; a, b, c Koordinaten des neuen Ursprungs.

$$x = a + x', \; y = b + y', \; z = c + z'.$$

2. Drehung um den Ursprung.

OX′	bilde mit OX, OY, OZ die Winkel	$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1,$
OY′	" " " " " " "	$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2,$
OZ′	" " " " " " "	$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3.$

Schreibt man der Kürze halber die Buchstaben der Winkel für ihre Cosinus, so ist:

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \qquad x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z$$
$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \qquad y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z$$
$$z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \qquad z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z.$$

Zwischen den Cosinus bestehen die Beziehungen