Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 86. Aenderung des Koordinatensystemes.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

4. Inhalt V der dreiseitigen Pyramide.

1. Eine Ecke im Ursprung, die drei andern Ecken sind (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3).

$$V = \frac{1}{6}[x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_2(y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1)]$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

2. Liegt die erste Ecke nicht im Ursprung, sondern im Punkt (x, y, z), so ergiebt sich V, indem man das Koordinatensystem parallel verschiebt, so dass der Ursprung mit (x, y, z) zusammenfällt; man hat alsdann im vorigen Ausdruck

statt x_1, y_1, z_1 zu setzen $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$

Liegt (x, y, z) in derselben Ebene mit den drei übrigen Punkten, so ist $V = 0$; dies ist die Gleichung der Ebene durch jene drei Punkte.

§ 86. Aenderung des Koordinatensystemes.

1. Parallele Verschiebung der Axen; a, b, c Koordinaten des neuen Ursprungs.

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z'.$$

2. Drehung um den Ursprung.

OX' bilde mit OX, OY, OZ die Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$,
OY' „ „ „ „ „ „ „ $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$,
OZ' „ „ „ „ „ „ „ $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$.

Schreibt man der Kürze halber die Buchstaben der Winkel für ihre Cosinus, so ist:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' & x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' & y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' & z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z. \end{aligned}$$

Zwischen den Cosinus bestehen die Beziehungen

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \qquad \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$
$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1$$
$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \qquad \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1$$
$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\gamma_3 = 0 \qquad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$$
$$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0 \qquad \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0$$
$$\gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0 \qquad \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0.$$

3. Polarkoordinaten. $OP = r$, φ Winkel zwischen OP und der XYebene, gezählt von der letzteren gegen die $+Z$ Axe hin (von -90^0 bis $+90^0$); ψ ist der Winkel, den die Ebene ZOP mit der Ebene ZOX bildet, gezählt von der $+$ Xaxe aus im positiven Drehungssinn von $0^0 - 360^0$.

Uebergang von rechtwinkligen Koordinaten zu Polarkoordinaten und umgekehrt:

$$1.\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \sin\varphi = \frac{z}{r},\ \cos\psi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\sin\psi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$2.\ \begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\psi \\ y = r\cos\varphi\sin\psi \\ z = r\sin\varphi. \end{cases}$$

§ 87. Allgemeine Sätze.

1. Eine Fläche ist durch eine Gleichung zwischen x, y und z bestimmt. Die Bedingung dafür, dass der Punkt (x_1, y_1, z_1) auf der Fläche liegt, deren Gleichung $F(x, y, z) = 0$ ist, ist $F(x_1, y_1, z_1) = 0$.

2. Eine Linie ist durch zwei Gleichungen in x, y und z bestimmt; die Linie ist die Schnittlinie der durch jene zwei Gleichungen dargestellten Flächen. Jeder Punkt, dessen Koordinaten die beiden Gleichungen $F(x, y, z) = 0$ und $f(x, y, z) = 0$ befriedigen, liegt auf der Schnittlinie der durch die beiden Gleichungen dargestellten Flächen.