Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 88. Die Ebene.

3. Setzt man in der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ eine der Koordinaten, z. B. z, gleich null, so erhält man die Gleichung der Schnittlinie der Fläche mit der Ebene der andern Koordinaten, z. B. der XYebene.

4. Eliminiert man aus den Gleichungen zweier Flächen eine Koordinate, so erhält man die Gleichung der Projektion der Schnittlinie beider Flächen auf die Ebene der beiden andern Koordinaten. Bestimmt man aus den Gleichungen dreier Flächen die gemeinschaftlichen Werte von x, y, z, so stellen diese die Koordinaten der Schnittpunkte der drei Flächen dar.

5. $F(x, y, z) + \lambda f(x, y, z) = 0$ giebt die Gleichung einer Fläche an, welche durch die Schnittlinie oder die gemeinschaftlichen Punkte der beiden Flächen $F(x, y, z) = 0$ und $f(x, y, z) = 0$ geht.

§ 88. Die Ebene.

a, b, c Abschnitte der Ebene auf den Koordinatenaxen; α, β, γ die Winkel, welche das Lot vom Ursprung auf die Ebene mit den Axen bildet, p die Länge dieses Lotes.

1. Gleichungsformen für die Ebene:

1. allgemeine Form $Ax + By + Cz + D = 0$ (E)

2. " $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$

3. " $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$

(Normalform N)

Spur in der XYebene $Ax + By + D = 0$

" " " YZ " $By + Cz + D = 0$

" " " ZX " $Ax + Cz + D = 0$

Axenabschnitte:

$$a = -\frac{D}{A},\ b = -\frac{D}{B},\ c = -\frac{D}{C}.$$

Lot vom Ursprung:

$$p = a\cos\alpha = b\cos\beta = c\cos\gamma = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

(Das Vorzeichen der Wurzel wird so gewählt, dass p positiv wird.)

Winkel des Lotes p mit den Axen aus:

$$\cos\alpha = \frac{p}{a} = -\frac{Ap}{D} = -\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \text{ u. s. f.}$$

2. Besondere Fälle:

$$1. \begin{cases} x = a & \text{Ebene parallel zur YZebene,} \\ y = b & \text{,, ,, ,, ZX ,,} \\ z = c & \text{,, ,, ,, XY ,,} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} Ax + By + D = 0 & \text{Ebene parallel zur Zaxe} \\ Ax + Cz + D = 0 & \text{,, ,, ,, Y ,,} \\ By + Cz + D = 0 & \text{,, ,, ,, X ,,} \end{cases}$$

$$3. \; Ax + By + Cz = 0 \quad \text{,, durch den Ursprung}$$

$$4. \begin{cases} Ax + By = 0 & \text{,, ,, die Zaxe} \\ Ax + Cz = 0 & \text{,, ,, ,, Y ,,} \\ By + Cz = 0 & \text{,, ,, ,, X ,,} \end{cases}$$

3. Ebene durch den Punkt (x_1, y_1, z_1)

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

4. Ebene durch drei Punkte (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2,)$ (x_3, y_3, z_3)

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \text{ wobei}$$

$$A = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

(s. auch § 85_4.)

5. Abstand e eines Punktes (x_1, y_1, z_1) von der Ebene E oder N (s. 1.):

$$e = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p$$

6. Zwei Ebenen $Ax+By+Cz+D=0$ und $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$;

1. sie sind parallel, wenn $\frac{A}{A_1}=\frac{B}{B_1}=\frac{C}{C_1}$,

also Gleichungen zweier paralleler Ebenen

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ Ax+By+Cz+D_1=0 \end{cases} \text{oder}$$

$$\begin{cases} x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \\ x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p_1=0 \end{cases}$$

2. Abstand zweier paralleler Ebenen

$$\pm\frac{D-D_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=p-p_1$$

3. Winkel φ zweier Ebenen

$$\cos\varphi=\frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\pm\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2)}}$$

4. Sie sind senkrecht, wenn $\cos\varphi=0$, d. h. wenn

$$AA_1+BB_1+CC_1=0$$

7. Ebenenbüschel. Sind $A_1=0$, $A_2=0$ die Gleichungen zweier Ebenen (1) u. (2) in Normalform, so ist die Gleichung einer dritten Ebene (3) die durch die Schnittlinie der beiden ersten geht

$$A_1-\lambda A_2=0.$$

Sind (3, 1), (3, 2) die Neigungswinkel zwischen (3) und den beiden gegebenen Ebenen, so ist

$$\lambda=\frac{\sin(3,1)}{\sin(3,2)}.$$

Die Halbierungsebenen der von den beiden Ebenen gebildeten Keile haben daher die Gleichung

$$A_1\mp A_2=0$$

8. Drei Ebenen durch eine Gerade.

Damit drei Ebenen $E_1=0$, $E_2=0$, $E_3=0$ sich in derselben Geraden schneiden ist notwendig und hinreichend, dass es drei Zahlfaktoren λ_1, λ_2, λ_3 giebt, für welche die Identität besteht

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 = 0$$

9. Vier Ebenen durch einen Punkt. Damit vier Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$, $E_4 = 0$ durch einen und denselben Punkt gehen, ist notwendig und hinreichend, dass die Idendität besteht

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 E_4 = 0.$$

§ 89. Gerade Linie; gerade Linie und Ebene.

1. Jede Gerade ist durch zwei unabhängige Gleichungen ersten Grades zwischen x, y und z bestimmt.

Allgemeine Gleichungsformen:

$$(1) \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = mx + b \\ z = nx + c. \end{cases}$$

Die Koordinaten der Spuren in der XY-, YZ-, XZebene ergeben sich aus bezw. $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

2. Besondere Fälle.

1. $\begin{cases} y = mx + b \\ z = c \end{cases}$ Gerade parallel zur XYebene.

$\begin{cases} y = b \\ z = nx + c \end{cases}$ Gerade parallel zur XZebene.

$\begin{cases} z = py + q \\ x = a \end{cases}$ Gerade parallel zur YZebene.

2. $\begin{cases} y = b \\ z = c \end{cases}$ Gerade parallel zur Xaxe;

$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Xaxe.