# Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

**Bürklen, O. Th.**

**Leipzig, 1896**

§ 89. Gerade Linie ; gerade Linie und Ebene.

reichend, dass es drei Zahlfaktoren $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ giebt, für welche die Identität besteht

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 = 0$$

9. Vier Ebenen durch einen Punkt. Damit vier Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$, $E_3 = 0$, $E_4 = 0$ durch einen und denselben Punkt gehen, ist notwendig und hinreichend, dass die Idendität besteht

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 E_4 = 0.$$

## § 89. Gerade Linie; gerade Linie und Ebene.

1. Jede Gerade ist durch zwei unabhängige Gleichungen ersten Grades zwischen x, y und z bestimmt.

Allgemeine Gleichungsformen:

$$(1) \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = m x + b \\ z = n x + c. \end{cases}$$

Die Koordinaten der Spuren in der XY-, YZ-, XZebene ergeben sich aus bezw. $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

2. Besondere Fälle.

1\. $\begin{cases} y = m x + b \\ z = c \end{cases}$ Gerade parallel zur XYebene.

$\begin{cases} y = b \\ z = n x + c \end{cases}$ Gerade parallel zur XZebene.

$\begin{cases} z = p y + q \\ x = a \end{cases}$ Gerade parallel zur YZebene.

2\. $\begin{cases} y = b \\ z = c \end{cases}$ Gerade parallel zur Xaxe;

$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ Xaxe.

$\begin{cases} z = c \\ x = a \end{cases}$ Gerade parallel zur Yaxe;

$\begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ Yaxe.

$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ Gerade parallel zur Zaxe;

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ Zaxe.

3. $\begin{cases} y = mx \\ z = nx \end{cases}$ Gerade durch den Ursprung.

3. Winkel mit den Axen, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Wenn die Gleichungen der Geraden sind

$y = mx + b$, $z = nx + c$, so ist

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}},\quad \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}.$$

4. Gerade bestimmt durch einen Punkt $(x_1, y_1, z_1)$ und Richtung $(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}.$$

5. Gerade durch zwei Punkte $(x_1, y_1, z_1)$, $(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

6. Zwei gerade Linien.

$$\begin{cases} y = mx + b \\ z = nx + c \end{cases}\qquad \begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ z = n_1 x + c_1. \end{cases}$$

1. Die Geraden schneiden sich, wenn
$(b - b_1)(n - n_1) = (c - c_1)(m - m_1)$ (s. u. 5).
2. Sie sind parallel, wenn $m_1 = m$, $n_1 = n$.

3. Der Winkel $\varphi$ der Geraden ergiebt sich aus

$$\cos\varphi = \frac{1 + m m_1 + n n_1}{\sqrt{(1 + m^2 + n^2)(1 + m_1^{\,2} + n_1^{\,2})}}.$$

4. Sie sind senkrecht, wenn $\cos\varphi = 0$, also wenn $\quad 1 + m m_1 + n n_1 = 0.$

5. Kürzester Abstand zweier Geraden

$$e = \frac{(b - b_1)(n - n_1) - (c - c_1)(m - m_1)}{\sqrt{(m n_1 - m_1 n)^2 + (m - m_1)^2 + (n - n_1)^2}}, \text{ (s. o. 1.)}.$$

6. Abstand e zweier paralleler Geraden

$$\begin{cases} y = mx + b & y = mx + b_1 \\ z = nx + c & z = nx + c_1. \end{cases}$$

$$e = \frac{\sqrt{F^2 + G^2 + H^2}}{1 + m^2 + n^2}, \text{ wobei}$$

$$\begin{aligned} F &= (b - b_1)m + (c - c_1)n \\ G &= (c - c_1)mn - (b - b_1)(1 + n^2) \\ H &= (b - b_1)mn - (c - c_1)(1 + m^2). \end{aligned}$$

7. Gerade und Ebene.

$$\begin{cases} y = mx + b \\ z = nx + c \end{cases} \text{ und } Ax + By + Cz + D = 0.$$

1. Die Gerade liegt in der Ebene, wenn $A + Bm + Cn = 0$ und $Bb + Cc + D = 0.$

2. Die Gerade ist parallel der Ebene, wenn

$$A + Bm + Cn = 0.$$

3. Winkel $\omega$ zwischen der Geraden und der Ebene aus

$$\sin\omega = \frac{A + Bm + Cn}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(1 + m^2 + n^2)}}.$$

4. Die Gerade ist senkrecht zur Ebene, wenn

$$\frac{B}{A} = m, \frac{C}{A} = n.$$

8. Ebene durch Punkt $(x_1, y_1, z_1)$ senkrecht zur Geraden

$$y = mx + b,\ z = nx + c$$

$$(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0.$$

9. Gerade durch Punkt $(x_1, y_1, z_1)$ senkrecht zur Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\begin{cases} y - y_1 = \dfrac{B}{A}(x - x_1) \\ z - z_1 = \dfrac{C}{A}(x - x_1) \end{cases}$$

10. Ebene durch zwei sich schneidende gerade Linien (s. Nr. 6 1)

$$\begin{cases} y = mx + b \\ z = nx + c \end{cases} \qquad \begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ z = n_1 x + c_1. \end{cases}$$

$$[m(c - c_1) - n(b - b_1)]x - (c - c_1)y + (b - b_1)z = bc_1 - b_1 c$$

oder $$\frac{y - mx - b}{z - nx - c} = \frac{b - b_1}{c - c_1} \text{ oder } = \frac{m - m_1}{n - n_1}.$$

Ebene durch zwei parallele Gerade

$$\frac{y - mx - b}{z - nx - c} = \frac{b - b_1}{c - c_1}.$$

11. Ebene durch eine Gerade $y = mx + b$, $z = nx + c$ parallel zu einer 2. Geraden $y = m_1 x + b_1$, $z = n_1 x + c_1$

$$(mn_1 - m_1 n)x + (n - n_1)y - (m - m_1)z = b_1(n - n_1) - c_1(m - m_1).$$

12. Ebene durch einen Punkt $(x_1, y_1, z_1)$ parallel zu zwei Geraden

$$(mn_1 - m_1 n)(x - x_1) + (n - n_1)(y - y_1) - (m - m_1)(z - z_1) = 0.$$

## § 90. Krumme Flächen.

1. Cylinderflächen.

1. Die Leitlinie ist einfach gekrümmt, sie liegt in der XYebene, ihre Gleichung ist

$$1.\ F(x_0, y_0) = 0.$$