Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 90. Krumme Flächen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

8. Ebene durch Punkt (x_1, y_1, z_1) senkrecht zur Geraden

$$y = mx + b, \quad z = nx + c$$

$$(x - x_1) + m(y - y_1) + n(z - z_1) = 0.$$

9. Gerade durch Punkt (x_1, y_1, z_1) senkrecht zur Ebene $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\begin{cases} y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1) \\ z - z_1 = \frac{C}{A}(x - x_1) \end{cases}$$

10. Ebene durch zwei sich schneidende gerade Linien (s. Nr. 6 1)

$$\begin{cases} y = mx + b \\ z = nx + c \end{cases} \quad \begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ z = n_1 x + c_1. \end{cases}$$

$$[m(c - c_1) - n(b - b_1)]x - (c - c_1)y + (b - b_1)z = bc_1 - b_1 c$$

oder $\frac{y - mx - b}{z - nx - c} = \frac{b - b_1}{c - c_1}$ oder $= \frac{m - m_1}{n - n_1}$.

Ebene durch zwei parallele Gerade

$$\frac{y - mx - b}{z - nx - c} = \frac{b - b_1}{c - c_1}.$$

11. Ebene durch eine Gerade $y = mx + b$, $z = nx + c$ parallel zu einer 2. Geraden $y = m_1 x + b_1$, $z = n_1 x + c_1$

$$(mn_1 - m_1 n)x + (n - n_1)y - (m - m_1)z = b_1(n - n_1) - c_1(m - m_1).$$

12. Ebene durch einen Punkt (x_1, y_1, z_1) parallel zu zwei Geraden

$$(mn_1 - m_1 n)(x - x_1) + (n - n_1)(y - y_1) - (m - m_1)(z - z_1) = 0.$$

§ 90. Krumme Flächen.

1. Cylinderflächen.

1. Die Leitlinie ist einfach gekrümmt, sie liegt in der XYebene, ihre Gleichung ist

$$1.\ F(x_0, y_0) = 0.$$

Die Gleichungen der erzeugenden Mantellinie sind

$$2.\ y = mz + y_0,\ x = pz + x_0,$$

dann ist die Gleichung der Cylinderfläche das Eliminationsresultat von x_0 und y_0 aus 1. und 2., also

$$3.\ F(x - pz, y - mz) = 0.$$

2. Die Leitlinie sei eine doppeltgekrümmte Kurve, ihre Gleichungen

$$(1) \begin{cases} \varphi\ (x, z) = 0 \\ \psi\ (y, z) = 0, \end{cases}$$

die Gleichungen der erzeugenden Mantellinie seien

$$\begin{cases} y = mz + y_0 \\ x = pz + x_0. \end{cases}$$

Ist (x_1, y_1, z_1) der Schnittpunkt der Mantellinie mit der Leitlinie, so ist

$$\begin{cases} \varphi\,(x_1, z_1) = 0 \\ \psi\,(y_1, z_1) = 0 \end{cases} \text{ u. } \begin{cases} y_1 = mz_1 + y_0 \\ x_1 = pz_1 + x_0. \end{cases}$$

Die Elimination von (x_1, y_1, z_1) aus diesen vier Gleichungen liefert die Gleichung $F(x_0, y_0) = 0$ der XY Spur der Fläche, aus ihr folgt

$$F\ (x - pz, y - mz)$$

als Gleichung der Zylinderfläche.

2. Kegelflächen.

1. Die Leitlinie liege in der XY Ebene, ihre Gleichung sei $F\ (x, y) = 0$, (x_0, y_0) ein Punkt derselben, (f, g, h) die Spitze des Kegels, dann folgt aus den Gleichungen einer Mantellinie

$$(1)\ \frac{y - g}{y_0 - g} = -\frac{z - h}{h},\ \frac{x - f}{x_0 - f} = -\frac{z - h}{h}, \text{ und aus}$$

$$(2)\ F\ (x_0, y_0) = 0.$$

Durch Elimination von x_0 und y_0 als Gleichung der Kegelfläche

$$F\left(\frac{fz - hx}{z - h},\ \frac{gz - hy}{z - h}\right) = 0.$$

2. Ist die Leitlinie doppelt gekrümmt, (x_1, y_1, z_1) ein Punkt derselben und sind $\varphi(x, z) = 0$ und $\psi(y, z) = 0$ ihre Gleichungen, so erhält man aus den Gleichungen der Verbindungslinie der Spitze (f, g, h) mit (x_1, y_1, z_1)

$$\frac{y-g}{y_1-g} = \frac{z-h}{z_1-h}, \quad \frac{x-f}{x_1-f} = \frac{z-h}{z_1-h}$$

und aus den Gleichungen $\varphi(x_1, y_1) = 0$, $\psi(x_1, y_1) = 0$ Durch Elimination von (x_1, y_1, z_1) die Gleichung der Fläche; sie hat die Form

$$F\left(\frac{fz-hx}{z-h}, \frac{gz-hy}{z-h}\right) - 0.$$

Legt man die Zaxe durch die Spitze, dann geht die Gleichung über in

$$F\left(\frac{hx}{h-z}, \frac{hy}{h-z}\right) = 0,$$

legt man den Ursprung in die Spitze, so erhält man, z für $h-z$ setzend,

$$F\left(\frac{hx}{z}, \frac{hy}{z}\right) = 0.$$

S c h i e f e r K r e i s k e g e l. Spitze im Ursprung, Leitlinie im Abstand h parallel zur XY-Ebene, (a, b, h) Koordinaten des Kreismittelpunktes, r Halbmesser

$$\left(\frac{hx}{z} - a\right)^2 + \left(\frac{hy}{z} - b\right)^2 = r^2.$$

3. D r e h f l ä c h e n (Rotationsflächen).

1. Die Drehaxe liege in der Zaxe, die Gleichung des in der XZebene liegenden Meridians sei $x = f(z)$, dann ist die Gleichung der Drehfläche

$$\sqrt{x^2 + y^2} = f(z).$$

2. Gerader K r e i s k e g e l, Zaxe Drehaxe, Spitze im Ursprung

$$x^2 + y^2 = p^2 z^2.$$

3. Drehungshyperboloid:

Einschaliges, erzeugt durch Drehung der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2}(z^2 + c^2) \text{ oder}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Zweischaliges, erzeugt durch Drehung der Hyperbel $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ um die Zaxe

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{c^2}(z^2 - c^2) \text{ oder}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

Ist $a = c$, so heissen die Hyperboloide gleichseitig. Der zugehörige Asymptotenkegel hat in beiden Fällen die Gleichung

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 z^2}{c^2}.$$

4. Drehungsparaboloid, erzeugt durch Drehung der Parabel $x^2 = 2pz$

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

4. Schraubenlinie mit Axe in der Zaxe, h Ganghöhe

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = \frac{ht}{2\pi} = \text{arc}\, t \end{cases}$$

und Schraubenfläche, ein die Zaxe schneidender und zu dieser senkrechter Strahl gleitet der Schraubenlinie entlang,

$$\frac{y}{x} = \text{tg}\, \frac{2\pi z}{h}.$$