Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

Bürklen, O. Th.

Leipzig, 1896

§ 92. Funktion ; enendlich kleine Grössen ; Differentialquotient.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

Höhere Analysis.

A. Differentialrechnung.

§ 92. Funktion; unendlich kleine Grössen; Differentialquotient.

Funktionen.

1. Eine Zahl von unveränderlichem Wert 3, 5, a, $3a - b \ldots$) heisst eine Konstante; eine Zahl, welche alle Werte der Zahlenreihe annehmen kann, heisst eine Veränderliche (in der Regel bezeichnet mit t, x, y, z).

2. Eine Zahl, welche von einer oder mehreren Veränderlichen abhängt, heisst eine Funktion derselben. Der Inhalt eines Kreises, einer Kugel ist eine Funktion des Halbmessers; derjenige eines Rechtecks, eines Quaders ist eine Funktion von Länge und Breite, bezw. Länge, Breite und Höhe. Mit dem Wert der unabhängigen Veränderlichen ändert sich der Wert der Funktion, der abhängigen Veränderlichen.

Bezeichnung der Funktion: $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ und dergleichen,

$y = f(x)$ ist eine Funktion von einer unabhängigen Veränderlichen x,

$z = f(x, y)$ ist eine Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen, x und y,

$u = f(x, y, z)$ ist eine Funktion von drei unabhängigen Veränderlichen, x, y und z.

3. $y = f(x)$, $z = f(x, y)$ u. s. f. heissen entwickelte (explizite) Funktionen.

$F(x, y) = 0$, $F(x, y, z) = 0$ u. s. f. heissen unentwickelte (implizite) Funktionen.

4. Kommt jede unabhängige Veränderliche nur als Summand, Subtrahend, Faktor, Divisor oder als Basis einer ganzen oder gebrochenen Potenz vor, so heisst die Funktion algebraisch. Es ist z. B. y eine algebraische Funktion von x, wenn es gleich $a \pm x$, ax, $\frac{a}{x}$, x^a, $\sqrt[a]{x}$, $a + bx + cx^2$, $\sqrt{a^2 - x^2}$ u. s. f. ist. In allen übrigen Fällen heisst die Funktion transcendent; z. B. $y = a^x$, $y = \log x$, $y = \sin x$ u. s. f. sind transcendente Funktionen.

5. Eine Funktion heisst stetig zwischen x_0 und x_1, wenn für alle Werte zwischen x_0 und x_1 einem unendlich kleinen Wachstum von x auch ein unendlich kleines Wachstum von f (x) entspricht.

Unendlich kleine Grössen und Grenzwerte.

6. Wenn eine veränderliche Grösse sich der Null nähert und dabei einen Wert annimmt, der kleiner ist als jede angebbare Grösse, so nennt man sie unendlich klein.

7. Zwei unendlich kleine Grössen heissen von derselben Ordnung, wenn ihr Quotient gegen einen von null verschiedenen, endlichen Grenzwert konvergiert. Ist a eine endliche, γ eine unendlich kleine Grösse, so ist $a\gamma$ von derselben Ordnung wie γ.

8. Ist δ von der ersten Ordnung, so ist γ von der nten Ordnung, wenn der Quotient $\frac{\gamma}{\delta^n}$ gegen einen endlichen, von null verschiedenen Wert konvergiert, also wenn

$$\lim \frac{\gamma}{\delta^n} = q.$$

9. Ist eine endliche Grösse Γ gleich der Summe von unendlich vielen, unendlich kleinen Grössen $\gamma_1, \gamma_2 \ldots$, so bleibt Γ unverändert, wenn jede Grösse γ um ein Unendlich kleines ε von höherer Ordnung vermehrt wird. Ist also

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots = \lim \Sigma \gamma, \text{ so ist auch}$$

$$\Gamma = (\gamma_1 + \varepsilon_1) + (\gamma_2 + \varepsilon_2) + \ldots = \lim \Sigma (\gamma + \varepsilon).$$

10. Es ist

1. $\lim (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}_{\delta=0} = e, \quad \lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m_{m=\infty} = e;$

2. $\lim \left.\frac{a^\delta - 1}{\delta}\right|_{\delta=0} = \frac{\log a}{\log e}.$

3. $\lim \left.\frac{\sin \delta}{\delta}\right|_{\delta=0} = 1; \quad \lim \left.\frac{\operatorname{tg} \delta}{\delta}\right|_{\delta=0} = 1.$

4. $\lim \left.\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m\right|_{m=\infty} = e^x.$

11. Differential und Differentialquotient.

$$\begin{array}{l} y = f(x) \\ y + \Delta y = f(x + \Delta x) \\ \hline \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \end{array}$$

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = \frac{df(x)}{dx}$$

$$= f'(x) = D f(x).$$

dx heisst das Differential von x, $df(x) = f'(x)\,dx$ das Differential von $f(x)$. $\frac{df(x)}{dx}$ oder $f'(x)$ heisst die erste Ableitung oder der erste Differentialquotient von $f(x)$.

Ist C eine von x unabhängige Konstante, so ist

$$\frac{dC}{dx} = 0.$$

Die Ableitung des ersten Differentialquotienten giebt den zweiten u. s. f.; es ist also
$\frac{d\,f'(x)}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = f''(x) = D^2 f(x)$ die zweite Ableitung von $f(x)$.

§ 93. Allgemeine Formeln über Differentiation.

Es seien u, v, w Funktionen von x, A, B, C Konstanten.

1. $\frac{d\,f(u)}{dx} = \frac{d\,f(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

2. $d(Au + Bv + Cw) = A\,du + B\,dv + C\,dw$

$$\frac{d(Au + Bv + Cw)}{dx} = A\frac{du}{dx} + B\frac{dv}{dx} + C\frac{dw}{dx}$$
$$= A u' + B v' + C w'$$

3. $d(uv) = v\,du + u\,dv$; $d(uvw) = vw\,du + uw\,dv + uv\,dw$

$$\frac{d(uv)}{dx} = u'v + uv' = uv\left(\frac{1}{u} \cdot u' + \frac{1}{v} v'\right)$$
$$\frac{d(uvw\ldots)}{dx} = uvw\ldots\left(\frac{1}{u}u' + \frac{1}{v}v' + \frac{1}{w}w' + \ldots\right)$$

4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

5. Bezeichnet man die nte Ableitung von u mit $u^{(n)}$ so ist:

$$\frac{d^n(Au + Bv)}{dx^n} = A u^{(n)} + B v^{(n)}$$
$$(uv)^{(n)} = u^{(n)} v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v^{(1)} + \binom{n}{2} u^{(n-2)} v^{(2)} + \ldots$$
$$+ \binom{n}{1} u^{(1)} v^{(n-1)} + u v^{(n)}$$