# Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik

**Bürklen, O. Th.**

**Leipzig, 1896**

§ 93. Allgemeine Formeln über Differentitation.

urn:nbn:de:hbz:466:1-78595

Die Ableitung des ersten Differentialquotienten giebt den zweiten u. s. f.; es ist also

$\frac{d f'(x)}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = f''(x) = D^2 f(x)$ die zweite Ableitung von $f(x)$.

## § 93. Allgemeine Formeln über Differentiation.

Es seien u, v, w Funktionen von x, A, B, C Konstanten.

1. $\frac{d f(u)}{dx} = \frac{d f(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

2. $d(Au + Bv + Cw) = A\,du + B\,dv + C\,dw$

$$\frac{d(Au + Bv + Cw)}{dx} = A\frac{du}{dx} + B\frac{dv}{dx} + C\frac{dw}{dx}$$
$$= A u' + B v' + C w'$$

3. $d(uv) = v\,du + u\,dv$; $d(uvw) = vw\,du + uw\,dv + uv\,dw$

$$\frac{d(uv)}{dx} = u'v + uv' = uv\left(\frac{1}{u} . u' + \frac{1}{v} v'\right)$$

$$\frac{d(uvw\ldots)}{dx} = uvw\ldots\left(\frac{1}{u}u' + \frac{1}{v}v' + \frac{1}{w}w' + \ldots\right)$$

4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

5. Bezeichnet man die nte Ableitung von u mit $u^{(n)}$ so ist:

$$\frac{d^n(Au + Bv)}{dx^n} = A u^{(n)} + B v^{(n)}$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)} v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v^{(1)} + \binom{n}{2} u^{(n-2)} v^{(2)} + \ldots$$
$$+ \binom{n}{1} u^{(1)} v^{(n-1)} + u v^{(n)}$$

6. Ist $u = f(z)$, $z = \varphi(y)$, $y = \psi(x)$, dann ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{dfz}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

7. Sind x und y Funktionen von t, so ist:

1. $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = y' : x'$$

2. $$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 = \frac{x'y'' - y'x''}{(x')^3}$$

8. Betrachtet man bei einer Funktion mehrerer unabhängiger Veränderlicher $u = f(x, y, z)$ irgend eine derselben, z. B. x, als veränderlich, die übrigen als konstant, so heisst die Ableitung der Funktion nach dieser Veränderlichen die partielle Ableitung nach x, sie wird mit $\frac{\delta u}{\delta x}$ bezeichnet.

Das totale Differential von u ist gleich der Summe der partiellen Differentiale nach sämtlichen Veränderlichen:

$$du = \frac{\delta u}{\delta x} dx + \frac{\delta u}{\delta y} dy + \frac{\delta u}{\delta z} dz$$

9. Sind x, y, z Funktionen von t, dann ist

$$\frac{df(x, y, z)}{dt} = \frac{\delta f}{\delta x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\delta f}{\delta z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

10. Es ist

$$\frac{\delta \frac{\delta u}{\delta x}}{\delta x} = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}; \quad \frac{\delta \frac{\delta u}{\delta x}}{\delta y} = \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y}; \quad \frac{\delta \frac{\delta u}{\delta y}}{\delta x} = \frac{\delta^2 u}{\delta y \delta x};$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 u}{\delta y \delta x}$$

11. $$d^2 u = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} dx^2 + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} dy^2 + \frac{\delta^2 u}{\delta z^2} dz^2$$

$$+ 2 \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y} dx dy + 2 \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta z} dx dz + 2 \frac{\delta^2 u}{\delta y \delta z} dy dz$$

symbolisch:

$$d^2u = \left(\frac{\delta u}{\delta x} dx + \frac{\delta u}{\delta y} dy + \frac{\delta u}{\delta z} dz\right)^{(2)},$$

wofern im Zähler jeden Gliedes $\delta u^2$ durch $\delta^2 u$ ersetzt wird. — Der Satz gilt ebenso auch für das Differential nter Ordnung.

12. Unentwickelte (implizite) Funktionen.

Ist $f(x, y) = 0$, so ist

1) $\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$, daher

2) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}}$$

Durch Differenzieren von 1) erhält man eine Gleichung, aus der sich $\frac{d^2y}{dx^2}$ bestimmt:

3) $$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + 2\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\delta f}{\delta y} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

13. Ist $f(x, y, z) = 0$, so kann z als Funktion von x und y betrachtet werden, dann ist

1) $\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta x} = 0$, hieraus folgt $\frac{\delta z}{\delta x}$;

2) $\frac{\delta f}{\delta y} + \frac{\delta f}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta y} = 0$, " " $\frac{\delta z}{\delta y}$.

Differenziert man Gleichung 1) nach x, dann auch nach y, ferner Gleichung 2) nach y, so ergeben sich Gleichungen, aus welchen man $\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}$, $\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}$ erhält.

14. Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.

$$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2x}{dy^2} : \left(\frac{dx}{dy}\right)^3$$

## § 94. Spezielle Formeln.

1. Das Differential und der Differentialquotient einer Konstanten ist null.

2. $\frac{dx^n}{dx} = n\,x^{n-1}$

3. $\frac{d^r(x^n)}{dx^r} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)\,x^{n-r}$, $r \leqq n$

---

4. $\frac{da^x}{dx} = a^x\,la$; $\frac{da^{mx}}{dx} = a^{mx}\,m\,l\,a$; $\frac{de^x}{dx} = e^x$

5. $\frac{d^r(a^x)}{dx^r} = a^x(l\,a)^r$

---

6. $\frac{d\overset{a}{\log}x}{dx} = \frac{1}{x}\overset{a}{\log}e = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{la} = \frac{M}{x}$ (s. § $29_7$.)

$$\frac{d\,l\,x}{dx} = \frac{1}{x}$$

7. $\frac{d^r(\log x)}{dx^r} = (-1)^{r-1}(r-1)!\,\frac{\log e}{x^r}$

---

8. $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

9. $\frac{d^r\sin x}{dx^r} = \sin\left(x + \frac{r\pi}{2}\right)$

10. $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

11. $\frac{d^r\cos x}{dx^r} = \cos\left(x + \frac{r\pi}{2}\right)$